



Lógica doble LD y gráficos existenciales gamma-LD*

Manuel Sierra Aristizábal^a

Resumen: en este trabajo se presenta el sistema deductivo para la *lógica proposicional doble* (LD) y los *gráficos existenciales gamma-LD*. Se prueba, de manera rigurosa, la consistencia de la LD y que los teoremas de LD corresponden, exactamente, con los gráficos existenciales válidos de gamma-LD. Cuando se restringe el lenguaje de la LD al lenguaje de la *lógica proposicional clásica* (LC), la restricción asociada a gamma-LD coincide con los gráficos existenciales válidos del sistema *alfa* de Charles Sanders Peirce. Resulta que los teoremas de la *lógica proposicional intuicionista* (LI) son teoremas de la LD; además, cuando se restringe el lenguaje de la LD al lenguaje de la LI, la restricción asociada a gamma-LD coincide con los gráficos existenciales válidos del sistema *alfa intuicionista* de Arnold Oostra. Como consecuencia, se infiere que gamma-LD tiene como casos particulares los gráficos existenciales alfa de LC y de LI. Finalmente, en la LD se derivan las definiciones aristotélicas de *verdad* y *falsedad*, con las cuales, se ilustra la capacidad de la LD para solucionar una versión de la *paradoja del mentiroso*, donde LC y LI fracasan.

Palabras clave: afirmación alterna; Aristóteles; gráficos existenciales; lógica intuicionista; negación alterna

Recibido: 11/02/2021

Aceptado: 03/06/2021

Disponible en línea: 30/06/2023

Cómo citar: M. Sierra, "Lógica doble LD y gráficos existenciales gamma-LD", Rev. Fac. Cienc. Básicas, vol. 17, n.º 2, pp. 11-37, jun., 2023, DOI: <https://doi.org/10.18359/rfcb.5320>

* Artículo de investigación.

^a Magíster en Ciencias. Universidad Eafit, Medellín, Colombia. Correo electrónico: msierra@eafit.edu.co
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8157-2577>

Double Logic DL and Existential Graphs Gamma-DL

Abstract: In this paper, the deductive system for double propositional logic (DL) and gamma-DL existential graphs are presented. It rigorously proves the consistency of the DL and that the DL theorems correspond exactly to the valid existential graphs of gamma-DL. When the language of DL is restricted to the language of *classical propositional logic* (CL), the restriction associated with gamma-DL coincides with the valid existential graphs of Charles Sanders Peirce's *alpha* system. It turns out that *intuitionistic propositional logic* (IL) theorems are DL theorems; furthermore, when the language of DL is restricted to the language of IL, the restriction associated with gamma-DL coincides with the valid existential graphs of Arnold Oostra's *intuitionistic alpha* system. As a consequence, it is inferred that gamma-LD has as particular cases, the alpha existential graphs of LC and LI. Finally, in DL, the Aristotelian definitions of truth and falsity are derived, with which the ability of DL to solve a version of the *liar paradox*, where LC and LI fail, is illustrated.

Keywords: alternate statement; Aristotle; existential graphics; intuitionistic logic; alternate negation

Lógica Dupla LD e gráficos existenciais gama-LD

Resumo: Neste artigo, apresenta-se o sistema dedutivo para *lógica proposicional dupla* (LD) e *gráficos existenciais gama-LD*. É rigorosamente testado quanto à consistência LD que os teoremas LD correspondem exatamente a gráficos gama-LD existenciais válidos. Quando a linguagem da LD está restrita à linguagem da *lógica proposicional clássica* (LC), a restrição associada à gama-LD coincide com os grafos existenciais válidos do sistema *alfa* de Charles Sanders Peirce. Acontece que os teoremas da *lógica proposicional intuicionista* (LI) são teoremas DL; além disso, quando a linguagem de LD é restrita à linguagem de IL, a restrição associada a gama-LD coincide com os gráficos existenciais válidos do sistema *alfa intuicionista* de Arnold Oostra. Como consequência, infere-se que gama-LD tem como casos particulares, os gráficos existenciais alfa de LC e LI. Finalmente, em DL, derivam-se as definições aristotélicas de verdade e falsidade, com as quais se ilustra a capacidade de DL de resolver uma versão do paradoxo do mentiroso, onde LC e LI falham.

Palavras-chave: enunciado alternativo; Aristóteles; gráficos existenciais; lógica intuicionista; negação alternativa

Introducción

En este trabajo, se presenta el sistema deductivo *lógica proposicional doble* (LD), como una extensión generalizada de la *lógica proposicional clásica* (LC), la cual incluye operadores alternos de afirmación o negación. A partir de estos operadores, en la LD, se definen operadores alternos a los conectivos binarios clásicos, de donde resulta que LD también es una extensión generalizada de la *lógica proposicional intuicionista* (LI). No solo se tiene que la LC y la LI son casos particulares de LD, sino que, además, los conectivos binarios intuicionistas, sorprendentemente, pueden ser definidos en términos de los conectivos clásicos y los conectivos alternos en LD (característica que se pierde cuando se restringe el lenguaje de la LD al de la LI).

También se presentan los *gráficos existenciales* gamma-LD para la LD. Se prueba, de manera rigurosa y detallada, por un lado, la consistencia de gamma-LD y, por otro, que los teoremas de LD corresponden exactamente con los gráficos existenciales válidos de gamma-LD. Cuando se restringe el lenguaje de la LD al lenguaje de la LC, la restricción asociada a los gráficos gamma-LD coincide con los gráficos existenciales válidos del sistema alfa de Charles Sanders Peirce, presentado por Roberts [1] y con los gráficos existenciales válidos del sistema alfa₀ de Yuri Poveda [2]. Resulta también que los teoremas de la LI son teoremas de la LD. Además, cuando se restringe el lenguaje de LD al lenguaje de LI, la restricción asociada a los gráficos gamma-LD coincide con los gráficos existenciales válidos del sistema alfa-intuicionista de Arnold Oostra [3]. Como consecuencia, se infiere que gamma-LD tiene como casos particulares los gráficos existenciales de la LC y la LI.

Al interpretar (a) el operador de afirmación alterna como *verdad aristotélica* y (b) el operador de negación alterna como *falsedad aristotélica*, en la LD se tienen, como consecuencia, las definiciones de verdad y falsedad expuestas en *Metafísica IV* de Aristóteles [4]: “Decir de lo que es que es, y de lo que no es que no es, es lo verdadero; decir de lo que es que no es, y de lo que no es que es, es lo falso”. Así, resulta que estas definiciones son

teoremas de la LD. Finalmente, con esta lectura de los operadores alternos, se ilustra la capacidad de LD y gamma-LD para solucionar una versión de la *paradoja del mentiroso*, presentada por Bochenski [5] y Smullyan [6], donde, justamente, la LC y la LI fracasan.

Lenguaje

Se parte de un conjunto infinito numerable de *fórmulas atómicas clásicas* (FAC), las cuales se denotan $a, b, c, d, \dots$. A partir de las FAC, se obtiene el conjunto de *fórmulas atómicas alternas* (FAA), las cuales se denotan, a su vez, $a, b, c, d, \dots$.

El conjunto de *fórmulas atómicas* (FAT) se obtiene de la unión de los dos anteriores:

$$\text{FAT} = \text{FAC} \cup \text{FAA}$$

Los conectivos de la LD se clasifican de la siguiente manera:

- Conectivo unario clásico = $\{\sim\}$
- Conectivos unarios alternos = $\{\neg, +\}$
- Conectivos binarios clásicos = $\{\supset, \bullet, \cup, \equiv\}$
- Conectivos binarios alternos = $\{\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$

El conjunto FC de *fórmulas clásicas* se define de la siguiente manera:

1. $a \in \text{FAC} \Rightarrow a \in \text{FC}$
2. $X \in \text{FC} \Rightarrow \sim X \in \text{FC}$
3. $X, Y \in \text{FC} \Rightarrow X \supset Y, X \cup Y, X \bullet Y, X \equiv Y \in \text{FC}$
4. Solo 1 a 3 determinan FC

El conjunto FI de *fórmulas intuicionistas* se define de la siguiente manera:

1. $a \in \text{FAA} \Rightarrow a \in \text{FI}$
2. $X \in \text{FI} \Rightarrow \neg X \in \text{FI}$
3. $X, Y \in \text{FI} \Rightarrow X \rightarrow Y, X \vee Y, X \wedge Y, X \leftrightarrow Y \in \text{FI}$
4. Solo 1 a 3 determinan FI

El conjunto FOR de *fórmulas de la LD* se define de la siguiente manera:

1. $X \in \text{FC} \Rightarrow X \in \text{FOR}$
2. $X \in \text{FI} \Rightarrow X \in \text{FOR}$

3. $X, Y \in \text{FOR} \Rightarrow X \supset Y, X \cup Y, X \bullet Y, X \equiv Y, X \rightarrow Y, X \vee Y, X \wedge Y, X \leftrightarrow Y \in \text{FOR}$
4. $X \in \text{FOR} \Rightarrow \sim X, \neg X \in \text{FOR}$
5. Solo 1 a 4 determinan FOR

El conjunto FA de *fórmulas alternas* se define de la siguiente manera:

$X \in \text{FA} \Leftrightarrow X = \neg Y$, con $Y \in \text{FOR}$ o $X = a$; donde $a \in \text{FAA}$. Si $X \in \text{FOR}$, entonces X indica que $X \in \text{FA}$.

Definición 1 (operadores de verdad): en LD, a partir de la *falsedad alterna* $\neg X$, se definen los siguientes conectivos (donde $X, Y \in \text{FOR}$):

Verdad alterna: $+X = \neg \sim X$

Disyunción alterna: $X \vee Y = + (X \cup Y)$

Conjunción alterna: $X \wedge Y = + (X \bullet Y)$

Implicación alterna: $X \rightarrow Y = + (X \supset Y)$

Equivalencia alterna: $X \leftrightarrow Y = + (X \equiv Y)$

Refutable: $\neg X = \sim +X$

Satisfacible: $\otimes X = \sim \neg X$

Buena fundamentación: $*X = (\neg X \cup +X)$

Como consecuencias se tienen las siguientes equivalencias entre los llamados *operadores de verdad*:

- a. $+X \equiv \neg \sim X \equiv \sim \otimes X \equiv \sim \neg X$
- b. $\neg X \equiv + \sim X \equiv \sim \otimes X \equiv \sim \sim X$
- c. $\otimes X \equiv \sim + \sim X \equiv \sim \neg X \equiv \sim \sim X$
- d. $\neg X \equiv \sim + X \equiv \sim \neg \sim X \equiv \otimes \sim X$
- e. $*X \equiv +X \cup \neg X \equiv \neg X \supset \neg X \equiv \otimes X \supset +X$

Sistema deductivo

El *sistema deductivo* para LD consta de los siguientes axiomas (donde $X, Y, Z \in \text{FOR}$; y $\underline{X} \in \text{FA}$):

$$\text{Ax1.1} \quad X \supset (Y \supset X)$$

$$\text{Ax1.2} \quad (X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$$

$$\text{Ax1.3} \quad X \supset (X \cup Y)$$

$$\text{Ax1.4} \quad Y \supset (X \cup Y)$$

$$\text{Ax1.5} \quad (X \supset Z) \supset ((Y \supset Z) \supset ((X \cup Y) \supset Z))$$

$$\text{Ax1.6} \quad (X \bullet Y) \supset X$$

$$\text{Ax1.7} \quad (X \bullet Y) \supset Y$$

$$\text{Ax1.8} \quad (X \supset Y) \supset ((X \supset Z) \supset (X \supset (Y \bullet Z)))$$

$$\text{Ax1.9} \quad X \supset (\sim X \supset Y)$$

$$\text{Ax1.10} \quad X \cup \sim X$$

$$\text{Ax1.11} \quad (X \equiv Y) \supset (X \supset Y)$$

$$\text{Ax1.12} \quad (X \equiv Y) \supset (Y \supset X)$$

$$\text{Ax1.13} \quad (X \supset Y) \supset [(Y \supset X) \supset (X \equiv Y)]$$

$$\text{Ax2.1} \quad \text{AxMP}+: (X \supset Y) \supset (+X \supset +Y)$$

$$\text{Ax2.2} \quad \text{AxR}: \neg X \supset \sim X$$

$$\text{Ax2.3} \quad \text{AxT}: \underline{X} \supset +\underline{X}$$

$\text{Ax2.4} \quad \text{Ax}+: X \in \{\text{Ax1.1}, \dots, \text{Ax2.3}\} \Rightarrow +X$ es un axioma

Como única *regla de inferencia* se tiene el *modus ponens* (MP): de X y $X \supset Y$ se infiere Y .

Definición 2 (tipos de axiomas):

Axiomas clásicos: $\text{AxLC} = \{\text{Ax1.1}, \dots, \text{Ax1.13}\}$

Axiomas alternos: $\text{AxAL} = \{\text{Ax2.1}, \dots, \text{Ax2.4}\}$

Axiomas dobles: $\text{AxLD} = \text{AxLC} \cup \text{AxAL}$

Utilizando los operadores de verdad se infiere que

$$\text{Ax2.2} \quad \text{AxR}: \neg X \supset \sim X \Leftrightarrow +X \supset X \Leftrightarrow X \supset \otimes X.$$

$$\text{Ax2.3} \quad \text{AxT}: \underline{X} \supset +\underline{X} \Leftrightarrow +X \supset ++X \Leftrightarrow \neg X \supset +\neg X \Leftrightarrow -\neg X \supset \otimes X.$$

Definición 3 (teorema): para $X \in \text{FOR}$, se dice que X es un *teorema* ($X \in \text{TEO}$) si y solamente si existe una *demostración de X*. Es decir, X es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas, tales que cada una de ellas es un axioma, o bien se infiere de dos fórmulas anteriores, utilizando la regla de inferencia MP. El número de elementos de la sucesión se llama la *longitud de la prueba*.

En lo que sigue, se utilizan los siguientes resultados de la *lógica proposicional clásica* (LC), presentados en Caicedo [7] y Hamilton [8]; y como en la LD se tienen los correspondientes axiomas de la CP y la regla de inferencia MP, entonces estos resultados valen en la LD, donde $X, Y, Z \in \text{FOR}$:

I•c: *Introducción*: $[(Z \supset X) \bullet (Z \supset Y)] \supset [Z \supset (X \bullet Y)]$

I•: *Introducción de •*: $X \supset (Y \supset (X \bullet Y))$

E•c: *Eliminación*: $[Z \supset (X \bullet Y)] \supset [(Z \supset X) \bullet (Z \supset Y)]$

E•: *Eliminación de •*: $(X \bullet Y) \supset X, (X \bullet Y) \supset Y$

SH: *Silogismo hipotético*:
 $[(X \supset Y) \bullet (Y \supset Z)] \supset (X \supset Z)$

Exp: *Exportación*: $[X \supset (Y \supset Z)] \equiv [(X \bullet Y) \supset Z]$

EQ: *Equivalencia*: $(X \equiv Y) \equiv [(X \supset Y) \bullet (Y \supset X)]$

DN: *Doble negación*: $X \equiv \sim \sim X$

DI: *Demostración indirecta*: $X \supset (Y \bullet \sim Y) \Rightarrow \sim X$

N∪: *Negación de ∪*: $\sim (X \cup Y) \equiv (\sim X \bullet \sim Y)$

N•: *Negación de •*: $\sim (X \bullet Y) \equiv (\sim X \cup \sim Y)$

N⊃: *Negación de ⊃*: $\sim (X \supset Y) \equiv (X \bullet \sim Y)$

Tras: *Transposición*: $(X \supset Y) \equiv (\sim Y \supset \sim X)$

Imp: *Implicación*: $(X \supset Y) \equiv (\sim X \cup Y)$

Id: *Principio de identidad*: $X \supset X$

PR: *Principio de retorsión*: $\text{de } (\sim X \supset X) \equiv X$

TD: *Teorema de deducción*: $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \supset Y)$

EQ: *Equivalencia*: $(X \equiv Y) \equiv [(X \bullet Y) \cup (\sim X \bullet \sim Y)]$

SustEQ: $F(X), X, Y \in \text{FC}$ y
 $X \equiv Y \Rightarrow F(X) \supset F(Y)$

Com•: *Conmutatividad*. $(X \bullet Y) \equiv (Y \bullet X)$

Aso•: *Asociatividad*. $X \bullet (Y \bullet Z) \equiv (X \bullet Y) \bullet Z$

Idem•: *Idempotencia*. $(X \bullet X) \equiv X$

Proposición 1 (construcción de verdades alternas):

Para $X \in \text{FOR}$, $X \in \text{TEO}$, entonces $+X \in \text{TEO}$

Prueba: supóngase que $X \in \text{TEO}$, se probará que $+X \in \text{TEO}$, haciendo inducción sobre la longitud de la demostración de X .

Paso base (PB). La longitud de la demostración de X es 1, es decir X es un axioma, pero si X es un axioma entonces, por $Ax+$, $+X$ es axioma y, por tanto, $+X \in \text{TEO}$.

Paso de inducción (PI). Como hipótesis inductiva (HI), se tiene que, si la longitud de la demostración de Y es menor que L , $+Y \in \text{TEO}$. Supóngase que la demostración de X tiene longitud $L > 1$. Se tiene, entonces, que X es un axioma o X es consecuencia de pasos anteriores, utilizando la regla de inferencia MP.

En el primer, caso se procede como en el paso base. En el segundo, se tienen, para alguna fórmula Z , demostraciones de $Z \supset X$ y de Z , ambas demostraciones de longitud menor que L . Aplicando HI, resulta que $+(Z \supset X) \in \text{TEO}$ y $+Z \in \text{TEO}$. Como se tiene como axioma $MP+$: $+(Z \supset X) \supset (+Z \supset +X)$, aplicando dos veces la regla MP resulta que $+X \in \text{TEO}$.

Proposición 2 (trasposiciones). Para $X, Y, Z \in \text{FOR}$. Si $X \supset Y \in \text{TEO}$, entonces:

- $\sim Y \supset \sim X \in \text{TEO}$
- $\neg Y \supset \neg X \in \text{TEO}$
- $(\sim \sim X \supset \sim \sim Y), (\sim \sim X \supset \sim \sim Y) \in \text{TEO}$
- $Z \bullet X \supset Z \bullet Y \in \text{TEO}$
- $\neg Y \supset \neg (X \bullet Y) \in \text{TEO}$
- $(X \bullet \neg (X \bullet Y)) \supset \neg Y \in \text{TEO}$

Prueba:

Supóngase que $X \supset Y \in \text{TEO}$.

Parte a. Resulta de aplicar Tras en $X \supset Y$.

Parte b. Por la parte a, se infiere $\sim Y \supset \sim X \in \text{TEO}$; por la proposición 1, se afirma que $+(\sim Y \supset \sim X)$, por $MP+$ resulta $+\sim Y \supset +\sim X$, es decir, $\neg \sim Y \supset \neg \sim X$, lo cual por DN significa $\neg Y \supset \neg X \in \text{TEO}$.

Parte c. Resulta de aplicar la parte a dos veces.

Parte d. Supóngase $Z \bullet X$; por E•, se infieren Z y X ; por MP resulta Y ; por I• se afirma $Z \bullet Y$; finalmente, por TD se concluye que $Z \bullet X \supset Z \bullet Y \in \text{TEO}$.

Parte e. Por Ax1.7, se tiene que $(X \bullet Y) \supset Y \in \text{TEO}$ y, en consecuencia, por Tras también $\sim Y \supset \sim (X \bullet Y) \in \text{TEO}$; por la proposición 1, resulta $+(\sim Y \supset \sim (X \bullet Y)) \in \text{TEO}$; utilizando MP+ y MP se infiere $+\sim Y \supset +\sim (X \bullet Y) \in \text{TEO}$, es decir, $\neg \sim Y \supset \neg \sim (X \bullet Y) \in \text{TEO}$, por DN se concluye que $\neg Y \supset \neg (X \bullet Y) \in \text{TEO}$.

Parte f. Supóngase que X ; además supóngase que $\neg (X \bullet Y)$, por AxR y MP resulta $\sim (X \bullet Y)$; por N• se infiere $\sim X \cup \sim Y$; y por DN y SD se deduce $\sim Y$; utilizando TD resulta que $\neg (X \bullet Y) \supset \sim Y$; por proposición 1 se obtiene $+(\neg (X \bullet Y) \supset \sim Y)$, aplicando MP+ y MP, se deduce $+\neg (X \bullet Y) \supset +\sim Y$, es decir, $+\neg (X \bullet Y) \supset \neg Y$; por AxT se tiene $\neg (X \bullet Y) \supset +\neg (X \bullet Y)$, aplicando SH se concluye $\neg (X \bullet Y) \supset \neg Y$. Finalmente, por TD se ha probado $X \supset (\neg (X \bullet Y) \supset \neg Y) \in \text{TEO}$, lo cual por Exp equivale a $(X \bullet \neg (X \bullet Y)) \supset \neg Y \in \text{TEO}$.

Principios de inducción estructural para LD

Definición 4 (número de negaciones): se define la función F de FOR en FOR, de la siguiente manera:

$$(Y, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n+1} \in \text{FOR}):$$

$$F_0(Y) = Y_0 \bullet Y$$

$$F_1(Y) = Y_1 \bullet \# F_0(Y) = Y_1 \bullet \# (Y_0 \bullet Y)$$

$$F_{n+1}(Y) = Y_{n+1} \bullet \# F_n(Y)$$

Donde $Z = \#Y$ significa que $Z = \neg Y$, o bien $Z = \sim Y$; mientras que $F_n(Y)$ significa: Y se encuentra en una fórmula rodeada por n negaciones, esto se denota como Y^{Rn} .

Notación: Cuando sea conveniente, con el fin de simplificar la escritura, en lo que sigue, XY significa $X \bullet Y$; además por Aso•, XYZ significa $X(YZ)$ o $(XY)Z$; también por Com• es indiferente escribir XY o YX .

Proposición 3 (principio de inducción estructural fuerte para iteración y desiteración -PIEF-ID):

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) [X \in \text{FA} \text{ y } Y \in \text{FOR} \Rightarrow X \bullet F_n(Y) \equiv X \bullet F_n(X \bullet Y) \text{ y } (X \bullet Y^{Rn} \equiv X \bullet (X \bullet Y)^{Rn})]$$

Prueba: por inducción matemática sobre $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

Paso base (PB). Sea $n=0$. Se sabe que $X \bullet F_0(Y) = X \bullet Y_0 \bullet Y$. También se sabe que $X \bullet F_0(Y \bullet X) = X \bullet Y_0 \bullet X \bullet Y$. La igualdad se satisface por las reglas E•, I• y Com•, junto con TD. Resulta, entonces, que $X \bullet Y^{R0} \equiv X \bullet (X \bullet Y)^{R0}$.

Sea $n=1$. Se tiene que $X \bullet F_1(Y) = X \bullet Y_1 \bullet \# F_0(Y) = X \bullet Y_1 \bullet \# \{Y_0 \bullet Y\}$. Es decir, $X \bullet F_1(Y) = X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet Y)$ o $X \bullet F_1(Y) = X \bullet Y_1 \bullet \sim (Y_0 \bullet Y)$. También, se sabe que $X \bullet F_1(Y \bullet X) = X \bullet Y_1 \bullet \# \{F_0(X \bullet Y)\} = X \bullet Y_1 \bullet \# \{Y_0 \bullet X \bullet Y\}$; es decir, $X \bullet F_1(Y \bullet X) = X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet X \bullet Y)$ o $X \bullet F_1(Y \bullet X) = X \bullet Y_1 \bullet \sim (Y_0 \bullet X \bullet Y)$. De $X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet Y)$, por E•, se obtienen $X \bullet Y_1$ y $\sim (Y_0 \bullet Y)$, por N• resulta $\sim Y_0 \cup \sim Y$, por Ad se infiere $\sim Y_0 \cup \sim X \cup \sim Y$, por N• resulta $\sim (Y_0 \bullet X \bullet Y)$; finalmente, por I• se concluye $X \bullet Y_1 \bullet \sim (Y_0 \bullet X \bullet Y)$. así pues, por TD, se ha probado que $X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet Y) \supset X \bullet Y_1 \bullet \sim (Y_0 \bullet X \bullet Y)$.

De $X \bullet Y_1 \bullet \sim (Y_0 \bullet X \bullet Y)$, por E• se obtienen $X \bullet Y_1$ y $\sim (Y_0 \bullet X \bullet Y)$; por N•, resulta $\sim Y_0 \cup \sim X \cup \sim Y$; aplicando SD, se infiere $\sim Y_0 \cup \sim Y$; por N•, resulta $\sim (Y_0 \bullet Y)$; finalmente por I•, se concluye $X \bullet Y_1 \bullet \sim (Y_0 \bullet Y)$. De ese modo, por TD, se ha probado que $X \bullet Y_1 \bullet \sim (Y_0 \bullet X \bullet Y) \supset X \bullet Y_1 \bullet \sim (Y_0 \bullet Y)$. De los dos últimos resultados, por EQ, se concluye que $X \bullet Y_1 \bullet \sim (Y_0 \bullet X \bullet Y) \equiv X \bullet Y_1 \bullet \sim (Y_0 \bullet Y)$.

De $X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet Y)$, por E•, se obtienen $X \bullet Y_1$ y $\neg (Y_0 \bullet Y)$; por la proposición 2e, se infiere $\neg (Y_0 \bullet X \bullet Y)$; por I•, se deduce $X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet X \bullet Y)$. Entonces, por TD, se ha probado que $X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet Y) \supset X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet X \bullet Y)$.

De $X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet X \bullet Y)$, por E•, se obtienen Y_1 y $X \bullet \neg (Y_0 \bullet X \bullet Y)$; utilizando la proposición 2f, se deduce $\neg (Y_0 \bullet Y)$; por I•, resulta $X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet Y)$; aplicando TD, se concluye $X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet X \bullet Y) \supset X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet Y)$; y, como ya se probó la recíproca, por EQ, se infiere que $X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet X \bullet Y) \equiv X \bullet Y_1 \bullet \neg (Y_0 \bullet Y)$. Resulta, entonces, que $X \bullet Y^{R1} \equiv X \bullet (X \bullet Y)^{R1}$.

Paso inductivo (PI). Hipótesis inductiva (HI): $X \bullet F_n(Y) \equiv X \bullet F_n(X \bullet Y)$, es decir, $X \bullet Y^{Rn} \equiv X \bullet (X \bullet Y)^{Rn}$, para $n > 1$.

$\underline{X} F_{n+1}(Y) = \underline{X} Y_{n+1} \# F_n(Y)$, por el paso base, equivale a $\underline{X} Y_{n+1} \# \{\underline{X} F_n(Y)\}$; por HI equivale a $\underline{X} Y_{n+1} \# \{\underline{X} F_n(\underline{X} Y)\}$; por el paso base, equivale a $\underline{X} Y_{n+1} \# F_n(\underline{X} Y)$, es decir, $\underline{X} F_{n+1}(\underline{X} Y)$. De esta manera, se ha probado que $\underline{X} F_{n+1}(Y) \equiv \underline{X} F_{n+1}(\underline{X} Y)$, es decir, $\underline{X} \cdot Y^{Rn+1} \equiv \underline{X} \cdot (\underline{X} \cdot Y)^{Rn+1}$.

En consecuencia, por el principio de inducción matemática, se concluye PIEF-LD.

Proposición 4 (principio de inducción estructural clásico para iteración y desiteración –PIEC-ID):

$(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) [X, Y \in \text{FOR} \Rightarrow X \bullet G_n(Y) \equiv X \bullet G_n(X \bullet Y) \text{ y } X \bullet Y^{Rn} \equiv X \bullet (X \bullet Y)^{Rn}]$.

Donde $G_0(Y) = Y_0 \bullet Y$ y $G_{n+1}(Y) = Y_{n+1} \bullet \sim G_n(Y)$. G es la restricción de F solo a negaciones clásicas.

Observación: en el PIEC-ID no se requiere que $X \in \text{FA}$, basta que $X \in \text{FOR}$.

Prueba: basta observar que PIEC-ID es un caso particular de la proposición 3 PIEF-ID.

Proposición 5 (principio de inducción estructural para regiones pares e impares –PIE-RPI).

- $(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) [X, Y \in \text{FOR} \text{ y } X \supset Y \in \text{TEO} \Rightarrow F_{2n}(X) \supset F_{2n}(Y) \in \text{TEO} \text{ y } (X^{R2n} \supset Y^{R2n} \in \text{TEO})]$
- $(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) [X, Y \in \text{FOR} \text{ y } X \supset Y \in \text{TEO} \Rightarrow F_{2n+1}(Y) \supset F_{2n+1}(X) \in \text{TEO} \text{ y } (Y^{R2n+1} \supset X^{R2n+1} \in \text{TEO})]$

Prueba: inducción matemática sobre $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Supóngase que $X \supset Y \in \text{TEO}$.

Paso base (PB). $n = 0$:

- Por la proposición 2d, se infiere $Y_0 X \supset Y_0 Y \in \text{TEO}$, es decir, $F_0(X) \supset F_0(Y) \in \text{TEO}$. Entonces, resulta que $X^{R0} \supset Y^{R0}$.
- Por la proposición 2, partes a, b, d, se infiere $Y_1 \{Y_0 Y\} \supset Y_1 \{Y_0 X\} \in \text{TEO}$, es decir, $F_1(Y) \supset F_1(X) \in \text{TEO}$. Resulta entonces que $Y^{R1} \supset X^{R1}$.

Paso inductivo (PI):

Parte a. Hipótesis inductiva (HI): $F_{2n}(X) \supset F_{2n}(Y) \in \text{TEO}$. Por la proposición 2b, se infiere $\neg(F_{2n}(Y)) \supset \neg(F_{2n}(X)) \in \text{TEO}$; por la proposición 2a, resulta $\sim(F_{2n}(Y)) \supset \sim(F_{2n}(X)) \in \text{TEO}$; por lo que se tiene $\#F_{2n}(Y) \supset \#F_{2n}(X) \in \text{TEO}$; por la proposición 2d, se concluye $Y_{2n+1} \# F_{2n}(Y) \supset Y_{2n+1} \# F_{2n}(X) \in \text{TEO}$, es decir, $F_{2n+1}(Y) \supset F_{2n+1}(X) \in \text{TEO}$; de nuevo la proposición 2, las partes a, b y d implican $Y_{2n+2} \# F_{2n+1}(Y) \supset Y_{2n+2} \# F_{2n+1}(X) \in \text{TEO}$, lo cual significa $F_{2(n+1)}(X) \supset F_{2(n+1)}(Y) \in \text{TEO}$. Por tanto, $X^{R2(n+1)} \supset Y^{R2(n+1)}$.

Parte b. Hipótesis inductiva (HI). $F_{2n+1}(Y) \supset F_{2n+1}(X) \in \text{TEO}$. Por la proposición 2, partes a, b y d, se infiere que $Y_{2n+2} \# F_{2n+1}(X) \supset Y_{2n+2} \# F_{2n+1}(Y) \in \text{TEO}$, es decir, $F_{2n+2}(X) \supset F_{2n+2}(Y) \in \text{TEO}$; de nuevo, las partes a, b y d de la proposición 2 implican $Y_{2n+3} \# F_{2n+2}(Y) \supset Y_{2n+3} \# F_{2n+2}(X) \in \text{TEO}$, lo cual significa $F_{2(n+1)+1}(Y) \supset F_{2(n+1)+1}(X) \in \text{TEO}$. De ese modo, resulta que $Y^{R2(n+1)+1} \supset X^{R2(n+1)+1}$.

En consecuencia, por el principio de inducción matemática, se ha probado PIE-RPI.

Gráficos existenciales gamma-LD

Se toma como punto de partida la *hoja de aserción* (H), donde se dibujan los gráficos existenciales. El conjunto alfa-LC de *gráficos existenciales clásicos* se define de la siguiente manera:

- $a \in \text{FAC} \Rightarrow a \in \text{alfa-LC}$
- $\lambda \in \text{alfa-LC}$ (λ es el gráfico vacío)
- $X \in \text{alfa-LC} \Rightarrow (X) \in \text{alfa-LC}$
- $X, Y \in \text{alfa-LC} \Rightarrow XY \in \text{alfa-LC}$
- Solo 1 a 4 determinan alfa-LC

El conjunto alfa-LI de *gráficos existenciales intuitionistas* se define de la siguiente manera:

- $\underline{a} \in \text{FAA} \Rightarrow \underline{a} \in \text{alfa-LI}$
- $\lambda \in \text{alfa-LI}$ (λ es el gráfico vacío)
- $X \in \text{alfa-LI} \Rightarrow [X] \in \text{alfa-LI}$
- $X, Y \in \text{alfa-LI} \Rightarrow XY, [X(Y)], [(X)(Y)] \in \text{alfa-LI}$
- Solo 1 a 4 determinan alfa-LI

El conjunto gamma-LD de *gráficos existenciales LD* se define de la siguiente manera:

1. $X \in \text{alfa-LC} \Rightarrow X \in \text{gamma-LD}$
2. $\lambda \in \text{gamma-LD}$ (λ es el gráfico vacío)
3. $X \in \text{alfa-LI} \Rightarrow X \in \text{gamma-LD}$
4. $X \in \text{gamma-LD} \Rightarrow (X), [X] \in \text{gamma-LD}$
5. $X, Y \in \text{gamma-LD} \Rightarrow XY, [X(Y)], [(X)(Y)] \in \text{gamma-LD}$
6. Solo 1 a 5 determinan gamma-LD

El conjunto GA de *gráficos existenciales alternos* se define de la siguiente manera:

$X \in \text{GA} \Leftrightarrow X = [Y]$, con $Y \in \text{gamma-LD}$, o bien $X = \bar{a}$, donde $\bar{a} \in \text{FAA}$

Notación. Si $X \in \text{GAE}$, entonces $\underline{X}$ indica que $X \in \text{GA}$.

Reglas de transformación y validez

Cuando se tiene el gráfico existencial (X), se dice que X está rodeado por un *corte clásico*; mientras que, cuando se tiene el gráfico existencial $[X]$, se dice que X está rodeado por un *corte alterno*. Además, se dice que un gráfico existencial X se encuentra en una *región par*, lo cual se denota $X \in \text{RP}$, si X se está rodeado por un número par de cortes (clásicos o alternos). Por el contrario, X se encuentra en una *región impar*, lo que se denota $X \in \text{RI}$, si X se encuentra rodeado por un número impar de cortes (clásicos o alternos).

Además, $X \in \text{R}_k\text{P}$ significa que X se encuentra en la *región k*, la cual es par; mientras que $X \in \text{R}_k\text{I}$ significa que X se encuentra en la *región k*, que es impar. Asimismo, X se encuentra en una *región clásica*, hecho denotado como $X \in \text{RC}$, si X no se está rodeado por cortes alternos; mientras que X se encuentra en una *región alterna*, que se denota $X \in \text{RA}$, si X se encuentra rodeado por al menos un corte alterno.

Notación. $X \xrightarrow{\text{Re}} Z$ significa que la *regla de transformación Re*, aplicada a un gráfico X , permite inferir un nuevo gráfico Z . Si también Z se transforma en X mediante *Re*, entonces se escribe $X \xrightarrow{\text{Re}} Z$.

$X \gg Z$ significa que X se transforma en Z , utilizando un número finito de reglas de transformación. Para $X \in \text{gamma-LD}$, se dice que X es *válido*, lo cual se denota de la siguiente manera: $X \in \text{GEV}$, si $\lambda \gg X$.

Definición 5 (definición de λ):

Definición de λ (def- λ): $\lambda \xrightarrow{\text{def-}\lambda} \lambda$ (gráfico vacío).

El conjunto RTRA de *reglas primitivas de transformación* (donde $X, Y, Z \in \text{gamma-LD}$) consta de

1. Regla lambda (R λ):
 $\lambda \in \text{GEV}$
2. Borrado (B):
 $XY \in \text{RP} \Rightarrow XY \xrightarrow{B} X$
 $XY \in \text{RP} \Rightarrow XY \xrightarrow{B} Y$
3. Escritura (E):
 $X \in \text{RI} \Rightarrow X \xrightarrow{E} E XY$
 $X \in \text{RI} \Rightarrow X \xrightarrow{E} YX$
4. Doble corte clásico (DCC):
 $X \xrightarrow{DDC} ((X))$
5. Cambio de corte (CC):
 $[X] \in \text{RP} \Rightarrow [X] \xrightarrow{CC} (X)$
 $(X) \in \text{RI} \Rightarrow (X) \xrightarrow{CC} [X]$
6. Doble corte mixto para GEV (DCMGEV):
 $X \in \text{GEV} \Rightarrow X \xrightarrow{DCMGEV} [(X)]$
7. Doble corte mixto fuerte (DCMF):
 $\underline{X} \in \text{RP} \Rightarrow X \xrightarrow{DCMF} [(X)]$
 $X \in \text{RI} \Rightarrow [(X)] \xrightarrow{DCMF} \underline{X}$
8. Iteración (I):
 $X \xrightarrow{I} XX$
9. Desiteración (D):
 $XX \xrightarrow{D} X$
10. Iteración clásica (IC):
 $X, Y \in \text{RC} \Rightarrow X(\dots(Y)\dots) \xrightarrow{IC} X(\dots(XY)\dots)$
11. Desiteración clásica (DC):
 $X, Y \in \text{RC} \Rightarrow X(\dots(XY)\dots) \xrightarrow{DC} X(\dots(Y)\dots)$

12. Iteración fuerte (IF):

$$X\{\dots\{Y\}\dots\} \xrightarrow{IF} X\{\dots(XY)\dots\}$$

Donde $\{Z\}$ significa (Z) o $[Z]$.

13. Desiteración fuerte (DF):

$$X\{\dots\{XY\}\dots\} \xrightarrow{DF} X\{\dots\{Y\}\dots\}$$

14. Solo las reglas 1 a 13 determinan el conjunto RTRA.

Notación. Las reglas de la forma $X \overset{R}{\Rightarrow} Y$ indican que $X \overset{R}{\Rightarrow} Y$ y $Y \overset{R}{\Rightarrow} X$ valen tanto en regiones pares como en regiones impares.

Observaciones:

- Formalmente, las reglas IC y DC se expresan así: **IC:** $XG_n(Y) \xrightarrow{IC} XG_n(XY)$. **DC:** $XG_n(XY) \xrightarrow{DC} XG_n(Y)$. Donde $G_0(Y) = Y_0Y$, $G_1(Y) = Y_1(G_0(Y)) = Y_1(Y_0Y)$, $G_{n+1}(Y) = Y_{n+1}(G_n(Y))$. $G_n(Y)$ significa que, Y se encuentra en una región rodeada por n cortes clásicos
- Formalmente, las reglas IF y DF se expresan así: **IF:** $XH_n(Y) \xrightarrow{IF} XH_n(XY)$. **DF:** $XH_n(XY) \xrightarrow{DF} XH_n(Y)$. Donde $H_0(Y) = Y_0Y$, $H_1(Y) = Y_1[H_0(Y)] = Y_1[Y_0Y]$, $H_{n+1}(Y) = Y_{n+1}[H_n(Y)]$. $H_n(Y)$ significa que, Y se encuentra en una región rodeada por n cortes intuicionistas y/o clásicos.

Proposición 6 (reglas de transformación derivadas):

1. Doble corte clásico λ (DCC λ):

$$((\lambda)) \in \text{GEV}, (()) \in \text{GEV}$$

2. Doble corte mixto (DCM):

$$X \in \text{RP} \Rightarrow [(X)] \xleftrightarrow{DCM} X$$

$$X \in \text{RI} \Rightarrow X \xleftrightarrow{DCM} [(X)]$$

3. Doble corte mixto λ (DCM λ):

$$[(\lambda)] \in \text{GEV}, [()] \in \text{GEV}$$

4. Cambio de corte específico (CCE):

$$[X(Y)] \in \text{RP} \Rightarrow [X(Y)] \xleftrightarrow{CCE} [X[Y]]$$

$$[X[Y]] \in \text{RI} \Rightarrow [X[Y]] \xleftrightarrow{CCE} [X(Y)]$$

5. Doble corte mixto fuerte (DCMF.1):

$$[(X)] \xleftrightarrow{DCMF.1} X$$

6. Triple corte mixto (TCM):

$$[[([X])] \xleftrightarrow{TCM} [X]$$

7. Doble corte alterno fuerte (DCAF):

$$X \in \text{RP} \Rightarrow X \xrightarrow{DCAF} [[X]]$$

$$X \in \text{RI} \Rightarrow [[X]] \xrightarrow{DCAF} X$$

8. Triple corte alterno (TCA):

$$[X] \in \text{RP} \Rightarrow [X] \xrightarrow{TCA} [[[X]]]$$

$$[X] \in \text{RI} \Rightarrow [[[X]]] \xrightarrow{TCA} [X]$$

9. Triple corte alterno fuerte (TCAF):

$$[X] \in \text{RP} \Rightarrow [[[X]]] \xrightarrow{TCAF} [X]$$

$$[X] \in \text{RI} \Rightarrow [X] \xrightarrow{TCAF} [[[X]]]$$

10. Triple corte alterno fuerte (TCAF.1):

$$[[[X]]] \xleftrightarrow{TCAF.1} [X]$$

11. Cuádruple corte alterno (CCA):

$$[[[[X]]]] \xleftrightarrow{CCA} [[X]]$$

12. Iteración. Desiteración (ID):

$$X \xleftrightarrow{ID} XX$$

Prueba 1. $\lambda \xleftrightarrow{DCC} ((\lambda))$, y por $R\lambda$ se tiene que $\lambda \in \text{GEV}$, por lo que $((\lambda)) \in \text{GEV}$; por B, resulta que $(()) \in \text{GEV}$.

Prueba 2. $X \in \text{RP} \Rightarrow [(X)] \in \text{RP} \Rightarrow [(X)] \xrightarrow{CC} ((X)) \xrightarrow{DCC} X$.

$$X \in \text{RI} \Rightarrow ((X)) \in \text{RI} \Rightarrow X \xrightarrow{DCC} ((X)) \xrightarrow{CC} [(X)].$$

Prueba 3. Por $R\lambda$, se tiene que $\lambda \in \text{GEV}$; aplicando DCMGEV, resulta $[(\lambda)]$; por B, se infiere que $[()] \in \text{GEV}$.

Prueba 4. $[X(Y)] \in \text{RP} \Rightarrow (Y) \in \text{RI} \Rightarrow [X(Y)] \xrightarrow{CC} [X[Y]]$.
 $[X[Y]] \in \text{RI} \Rightarrow [Y] \in \text{RP} \Rightarrow [X[Y]] \xrightarrow{CC} [X(Y)]$

Prueba 5. Se tienen $X \in RP \Rightarrow X \xrightarrow{DCMF} [(X)]$
y $X \in RP \Rightarrow [(X)]X \xrightarrow{DCM}$, tam-
bién se tienen $X \in RI \Rightarrow [(X)]$
 $\xrightarrow{DCMF} X$ y $X \in RI \Rightarrow X \xrightarrow{DCM} [(X)]$.
Por lo que $[(X)] \xrightarrow{DCMF.1} X$.

Prueba 6. En particular, se tiene $[[[X]]]$
 $\xrightarrow{DCMF.1} [X]$.

Prueba 7. $\frac{X \in RP \Rightarrow X \xrightarrow{DCMF} [(X)]}{CC} \Rightarrow [[X]]$;
además,
 $\frac{X \in RI \Rightarrow [X] \in RP \Rightarrow [[X]]}{CC} \Rightarrow [(X)] \xrightarrow{DCMF} X$.

Prueba 8. Caso particular de DCAF.

Prueba 9. $[X] \in RP \Rightarrow [[[[X]]]] \xrightarrow{CC} [[([X])]]$
 $\xrightarrow{DCMF} [X]$. Además,
 $[X] \in RI \Rightarrow [[[[X]]]] \xrightarrow{TCA} [X]$.

Prueba 10. $[X] \in RP \Rightarrow [[[[X]]]] \xrightarrow{TCAF} [X]$ y
 $[X] \in RP \Rightarrow [X] \xrightarrow{TCA} [[[[X]]]]$.
Luego, $[X] \in RP \Rightarrow [X] \xrightarrow{TCAF} [[[[X]]]]$.
 $[X] \in RI \Rightarrow [X] \xrightarrow{TCA} [[[[X]]]]$
y $[X] \in RI \Rightarrow [[[[X]]]] \xrightarrow{TCA} [X]$.
Luego, $[X] \in RI \Rightarrow [[[[X]]]] [X]$.
Por tanto, $[X] [[[[X]]]]$.

Prueba 11. Caso particular de TCAF.1.

Prueba 12. $X \xrightarrow{1} XX$. Además, $XX \xrightarrow{D} X$. Por
tanto, XX .

Proposición 7 (reversión de las reglas de transformación):

Para $X, Y \in \text{gamma-LD}$.

- $(\forall R \in \text{RTRA}) [X \in RP \text{ y } X \xrightarrow{R} Y] (\exists R' \in \text{RTRA}) [Y \in RI \text{ y } Y \xrightarrow{R'} X]$
- $(\forall R \in \text{RTRA}) \{[X \in R_k P \text{ y } X \xrightarrow{R} Y \Rightarrow Y \in R_k P] \text{ y } [X \in R_k I \text{ y } X \xrightarrow{R} Y \Rightarrow Y \in R_k I]\}$

Prueba: por simple inspección de las reglas primitivas 1 a 14.

Proposición 8 (principio de contraposición):

Para $X_0, X_n \in \text{gamma-LD}$:

$$X_0 \gg X_n \Rightarrow \{(X_0 \in RP \Rightarrow X_0 \gg X_n) \text{ y } (X_n \in RI \Rightarrow X_n \gg X_0)\}$$

Prueba: si $X_0 \gg X_n$, entonces existen $R_1, \dots, R_n \in \text{RTRA}$; y existen $X_1, \dots, X_{n-1} \in \text{gamma-LD}$, tales que $X_0 R_1 X_1 R_2 X_2 \dots X_{n-1} R_n X_n$; y se dice que la longitud de la transformación de $X_0 \gg X_n$ es n .

La prueba se realiza por inducción sobre la longitud de la transformación.

Paso base (PB). $n=1$. Significa que solo se aplicó una de las reglas primitivas; además, como X_0 está en una región de paridad 0, entonces R tiene que ser de la forma $X_0 \in RP \Rightarrow X_0 \xrightarrow{R} X_1$. Por la proposición 7a, se infiere que $X_1 \in RI \Rightarrow X_1 \xrightarrow{R'} X_0$.

Paso inductivo (PI). Hipótesis inductiva (HI): $(\forall n > 1) [X_0 \gg X_n \Rightarrow \{(X_0 \in RP \Rightarrow X_0 \gg X_n) \text{ y } (X_n \in RI \Rightarrow X_n \gg X_0)\}]$. Si $X_0 \gg X_{n+1}$, entonces $X_0 R_1 X_1 R_2 X_2 \dots X_{n-1} R_n X_n R_{n+1} X_{n+1}$. Es decir, $X_0 R_1 X_1 R_2 X_2 \dots X_{n-1} R_n X_n$ y $X_n R_{n+1} X_{n+1}$, de modo que, $X_0 \gg X_n$ y $X_n R_{n+1} X_{n+1}$. Aplicando HI y la proposición 7b, resultan $(X_0 \in RP \Rightarrow X_0 \gg X_n \text{ y } X_n \in RP)$, $(X_n \in RP \Rightarrow X_n R_{n+1} X_{n+1} \text{ y } X_{n+1} \in RP)$, $(X_n \in RI \Rightarrow X_n \gg X_0 \text{ y } X_0 \in RI)$ y $(X_{n+1} \in RI \Rightarrow X_{n+1} R'_{n+1} X_n \text{ y } X_n \in RI)$. Por lo que $(X_0 \in RP \Rightarrow X_0 \gg X_{n+1})$ y $(X_{n+1} \in RI \Rightarrow X_{n+1} \gg X_0)$.

Por el principio de inducción matemática, se concluye la veracidad del principio de contraposición.

Proposición 9 (teoremas de deducción gráfico y fuerte en gamma-LD -TDG y TDGF):

Para $X, Y \in \text{gamma-LD}$:

- TDG. $X \gg Y \Rightarrow (X(Y))$
- TDGF: $X \gg Y \Rightarrow [X(Y)]$

Prueba: supóngase que $X \gg Y$.

- Parte a. $\lambda \xrightarrow{DCC\lambda} (()) \xrightarrow{E} (X()) \xrightarrow{IC} (X(X))$
 $\xrightarrow{X \gg Y \text{ y proposición 8}} (X(Y))$.

Por tanto, $X \gg Y \Rightarrow (X(Y))$.

- Parte b. $\lambda \xrightarrow{DCM\lambda} [()] \xrightarrow{E} [X()] \xrightarrow{IF} [X(X)]$
 $\xrightarrow{X \gg Y \text{ y proposición 8}} [X(Y)]$.

Por tanto, $X \gg Y \Rightarrow [X(Y)]$.

Proposición 10 (teorema de demostración indirecta en gamma-LD -TDIG):

Para $X \in \text{gamma-LD}$:

- a. $X \gg () \Rightarrow (X)$
- b. $(\underline{X}) \gg () \Rightarrow \underline{X}$
- c. $\underline{X} \gg [] \Rightarrow [\underline{X}]$

Prueba:

Parte a. Supóngase que $X \gg ()$. Por TDG (proposición 9), se infiere que $(X(())) \xrightarrow{DCC} (X)$.

Parte b. Supóngase que $(X) \gg ()$. Por la parte a, se deduce que $((X)) \xrightarrow{DCC} X$.

Parte c. Supóngase que $\underline{X} \gg []$. Por TDGF (proposición 9), se infiere que $[\underline{X}([])] \xrightarrow{CC} [\underline{X}([])] \xrightarrow{DCAF} [\underline{X}]$.

Traducción de FOR a gamma-LD

Definición 6 (traducción de fórmulas a gráficos existenciales):

La función $()'$ de FOR en gamma-LD (donde $a \in \text{FAT}$ y X, Y) se define de la siguiente manera:

1. $a' = a$
2. $\{\sim X\}' = (X')$
3. $\{X \bullet Y\}' = X'Y'$
4. $\{X \supset Y\}' = (X'(Y'))$
5. $\{X \equiv Y\}' = \{X \supset Y\}' \{Y \supset X\}' = (X'(Y')) (Y'(X'))$
6. $\{X \cup Y\}' = ((X') (Y'))$
7. $Ax1.1' = \lambda$
8. $\{\neg X\}' = [X']$
9. $\{+X\}' = [(X')]$
10. $\{X \rightarrow Y\}' = [X' (Y')]$
11. $\{X \vee Y\}' = [(X') (Y')]$
12. $\{X \wedge Y\}' = [(X' Y')]$
13. $\{X \leftrightarrow Y\}' = [X' (Y')] [Y' (X')]$

Proposición 11 (validez en LD de las reglas primitivas de transformación en gamma-LD):

Para $X, Y \in \text{FOR}$:

$$(\forall R \in \text{RTRA})(\exists T \in \text{TEO})[X' \xrightarrow{R} Y' \Rightarrow T = X \supset Y]$$

Prueba:

Regla 1. Regla lambda ($R\lambda$):

$$\lambda \in \text{GEV}$$

$$\lambda = Ax1.1' \text{ y } Ax1.1 \in \text{TEO}$$

Regla 2. Borrado (B):

$$X'Y' \in \text{RP} \Rightarrow (X'Y' \xrightarrow{B} X') \text{ y } (X'Y' \xrightarrow{B} Y')$$

Regla 3. Escritura (E):

$$X'Y' \in \text{RI} \Rightarrow (X' \xrightarrow{E} X'Y') \text{ y } (Y' \xrightarrow{E} X'Y')$$

Por $Ax1.6$ y $Ax1.7$, se tienen $(X \bullet Y) \supset X \in \text{TEO}$ y $(X \bullet Y) \supset Y \in \text{TEO}$; por la proposición 5, se concluye que $(XY)^{R2n} \supset Y^{R2n} \in \text{TEO}$ y $(XY)^{R2n} \supset X^{R2n} \in \text{TEO}$; $Y^{R2n+1} \supset (XY)^{R2n+1} \in \text{TEO}$ y $X^{R2n+1} \supset (XY)^{R2n+1} \in \text{TEO}$.

Regla 4. Doble corte clásico (DCC):

$$X' \xleftrightarrow{DCC} ((X'))$$

Por DN, se tiene $\sim \sim X \equiv X \in \text{TEO}$, aplicando la proposición 5 se concluye que $(\sim \sim X)^{R2n} \equiv X^{R2n} \in \text{TEO}$ y $(\sim \sim X)^{R2n+1} \equiv X^{R2n+1} \in \text{TEO}$, por lo que $(\sim \sim X)^{Rn} \equiv X^{Rn} \in \text{TEO}$.

Regla 5. CC: Cambio de corte. $[X'] \in \text{RP} \Rightarrow [X'] \xrightarrow{CC} (X') \text{ y } (X') \in \text{RI} \Rightarrow (X') \xrightarrow{CC} [X']$.

Por AxR se tiene $\neg X \supset \sim X \in \text{TEO}$, por la proposición 5 se concluye que $(\neg X)^{R2n} \supset (\sim X)^{R2n} \in \text{TEO}$ y $(\neg X)^{R2n+1} \supset (\sim X)^{R2n+1} \in \text{TEO}$.

Regla 6. Doble corte mixto para GEV (DCMGEV):

$$X' \in \text{GEV} \Rightarrow X' \xleftrightarrow{DCMGEV} [(X')]$$

Por la proposición 1, se sigue que $X \in \text{TEO} \Rightarrow X \supset +X \in \text{TEO}$; por AxR , se tiene que $+X \supset X \in \text{TEO}$, por lo que resulta que $X \in \text{TEO} \Rightarrow X \equiv +X \in \text{TEO}$.

Regla 7. Doble corte mixto fuerte (DCMF):

tales que $\lambda R_1 X_1' R_2 X_2' \dots X_{n-1}' R_n X_n$; y se dice que la *longitud* de la transformación de $\lambda \gg X_n$ es n .

Por AxT, se tiene que $\underline{X} \supset +\underline{X} \in \text{TEO}$; aplicando la proposici3n 5, se concluye que $(\underline{X})^{R2n} \supset (+\underline{X})^{R2n} \in \text{TEO}$ y $(+\underline{X})^{R2n+1} \supset (\underline{X})^{R2n+1} \in \text{TEO}$.

Regla 8. Iteración (I):

$$X' \stackrel{I}{\Rightarrow} X'X'$$

Regla 9. Desiteración:

$$X'X' \stackrel{D}{\Rightarrow} X'.$$

Por Idem•, se tiene $(X \bullet X) \equiv X$; aplicando la proposición 5, se concluye que $(XX)^{R_{2n}} \equiv X^{R_{2n}} \in \text{TEO}$; y $(XX)^{R_{2n+1}} \equiv X^{R_{2n+1}} \in \text{TEO}$.

Regla 10. Iteración clásica (IC):

$$\frac{X', \quad Y' \in RC \Rightarrow X' (... (Y') ...) \quad \text{IC}}{(X'Y') ...} \Rightarrow X' (...)$$

Regla 11. Desiteración clásica (DC):

$$X', Y' \in RC \Rightarrow X' (...(X'Y')...) \stackrel{DC}{\Rightarrow} X' (...(Y')...)$$

Por la proposición 4, se tiene que, para $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $X \bullet Y^{\mathbb{R}^n} \equiv X \bullet (X \bullet Y)^{\mathbb{R}^n} \in \text{TEO}$.

Regla 12. Iteración fuerte (IF):

$$\underline{X}' \{ \dots \{ Y' \} \dots \} \stackrel{\text{IF}}{\Rightarrow} \underline{X}' \{ \dots \{ \underline{X}' Y' \} \dots \}$$

Regla 13. Desiteración fuerte (DF):

$\underline{X}' \{ \dots \{ \underline{X} \underline{Y} \} \dots \} \stackrel{\text{DF}}{\Rightarrow} \underline{X} \{ \dots \{ \underline{Y} \} \dots \}$, donde $\{ \underline{Z} \}$ significa (Z) o bien $[Z]$.

Por la proposición 3, se tiene que, para $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $X \bullet Y^{Rn} \equiv X \bullet (X \bullet Y)^{Rn}$.

Proposición 12 (Los gráficos válidos en gamma-LD son teoremas en LD):

$$(\forall Z \in \text{FOR}) (Z' \in \text{GEV} \Rightarrow Z \in \text{TEO})$$

Prueba: Si $\lambda \gg X_n'$ entonces existen $R_1, \dots, R_n \in \text{RTRA}$, y existen $\lambda, X_2', \dots, X_{n-1}' \in \text{gamma-LD}$,

La prueba se realiza por inducción sobre la longitud n de la transformación.

Paso base (PB). $n = 1$. Significa que solo se aplicó una de las reglas primitivas, y R_1 tiene que ser de la forma $\lambda \stackrel{R_1}{\Rightarrow} X_1$. Por la proposición 11, se infiere que $Ax1.1 \supset X_1 \in TEO$, luego $X_1 \in TEO$.

Paso inductivo (PI). Hipótesis inductiva (HI): $(\forall n > 1) [\lambda \gg X_n \Rightarrow X_n \in \text{TEO}]$. Si $\lambda \gg X_{n+1}$, entonces $\lambda R_1 X_1 R_2 X_2 \dots X_{n-1} R_n X_n R_{n+1} X_{n+1}$, es decir, $\lambda R_1 X_1 R_2 X_2 \dots X_{n-1} R_n X_n$ y $X_n R_{n+1} X_{n+1}$, por lo que, $\lambda \gg X_n$ y $X_n R_{n+1} X_{n+1}$. Aplicando la HI y TDG (proposición 11), se infieren $X_n \in \text{TEO}$ y $X_n \supset X_{n+1} \in \text{TEO}$; aplicando MP se concluye que $X_{n+1} \in \text{TEO}$. Por el principio de inducción matemática, se resulta que $(\forall Z \in \text{FOR}) (Z' \in \text{GEV} \Rightarrow Z \in \text{TEO})$.

Proposición 13 (*AxLC* válidos en *gamma-LD*):

$$(\forall X \in \text{AxLC}) (X' \in \text{GEV})$$

Prueba:

$$\text{Ax1.1. } \lambda \xRightarrow{\text{DCC}\lambda} ((\lambda)) \xRightarrow{\text{DCC}\lambda} ((\ (\ \))) \xRightarrow{\text{E}} (X'(Y'(\ \))) \xRightarrow{\text{IC}} (X'(Y'(\text{blue}))) \xRightarrow{\text{IC}} (\text{red}(X'(Y'(\text{red})))). \text{ Por tanto, } (\text{Ax1.1})' \in \text{GEV.}$$

Ax1.2. $(X'((Y'(Z')))) (X'(Y')) X' \xrightarrow{DCC} (X'Y'(Z'))$
 $(X'(Y')) X' \xrightarrow{DC} (Y'(Z')) ((Y')) X' \xrightarrow{DCC} (Y'(Z')) Y' X' \xrightarrow{D}$
 $((Z')) Y' X' \xrightarrow{DCC} Z' Y' X' \xrightarrow{B} Z'$. Aplicando TDG (proposición 9) 3 veces resulta que (Ax1.2)' $\in$ GEV.

$$\begin{aligned} & \text{Ax1.3 y Ax1.4. } \lambda \xrightarrow{\text{DCC}\lambda} ((\lambda)) \xrightarrow{\text{DCC}\lambda} (((\lambda))) \xrightarrow{\text{E}} \\ & (X'((Y')((\lambda)))) \xrightarrow{\text{IC}} (X'((Y')(X')))). \text{ Por tanto,} \\ & (\text{Ax1.3})' \in \text{GEV y } (\text{Ax1.4})' \in \text{GEV.} \end{aligned}$$

Ax1.5. $(X'(Z')) (Y'(Z')) ((X')(Y')) (Z') \stackrel{DC}{\Rightarrow} (X') (Y') ((X')(Y')) (Z') \stackrel{DC}{\Rightarrow} (X')(Y') () (Z') \stackrel{B}{\Rightarrow} ()$. Por TDIG (proposición 10), se infiere que $(X'(Z')) (Y'(Z')) ((X')(Y')) \gg Z'$. Aplicando TDG 3 veces, resulta que $(Ax1.5)' \in GEV$.

$$\text{Ax1.6} \vee \text{Ax1.7} \cdot \lambda \xrightarrow{\text{DCC}\lambda} (()) \xRightarrow{\text{E}} (X'Y'()) \xRightarrow{\text{IC}} (X'Y'(X')).$$

Por tanto, $(\text{Ax1.6})' \in \text{GEV}$ y $(\text{Ax1.7})' \in \text{GEV}$.

Ax1.8. $(X'(Y')) (X'(Z')) X' \xRightarrow{DC} ((Y')) ((Z')) X' \xRightarrow{DCC} Y' Z' X' \xRightarrow{B} Y' Z'$. Aplicando TDG 2 veces, resulta que $(Ax1.8)' \in \text{GEV}$.

Ax1.9. La misma prueba de Ax1.3. Por tanto, $(Ax1.9)' \in \text{GEV}$.

Ax1.10. $\lambda \xRightarrow{DCC\lambda} (()) \xRightarrow{E} (X' ()) \xRightarrow{I} (X' (X')) \xRightarrow{DCC} (((X')) (X'))$. Por tanto, $(Ax1.10)' \in \text{GEV}$.

Ax1.11 y Ax1.12. $(X \equiv Y)' \xRightarrow{\text{Definición}} (X \supset Y)' (Y \supset X)' \xRightarrow{B} (Y \supset X)$. Por tanto, $(Ax1.11)' \in \text{GEV}$ y $(Ax1.12)' \in \text{GEV}$.

Ax1.13. $(X \supset Y)' (Y \supset X)' \xRightarrow{\text{Definición}} (X \equiv Y)'$. Aplicando TDG 2 veces, resulta que $(Ax1.13)' \in \text{GEV}$.

Proposición 14 (AxAL válidos en gamma-LD):

$$(\forall X \in \text{AxAL}) (X' \in \text{GEV})$$

Prueba:

Ax2.1. $[[X'(Y'))]] [[X']] [[(Y')]] \xRightarrow{DCC} [X'(Y')] [(X')] [(Y')] \xRightarrow{DCM} [[X']] [(Y')] [(X')] [(Y')] \xRightarrow{DF} [[X']] [(Y')] [(X')] [(Y')] \xRightarrow{B} [[Y']] [(Y')] \xRightarrow{D} [(Y')] \xRightarrow{B} ()$. Por TDIG (proposición 10), se infiere que $[[X'(Y'))]] [[X']] \gg [(Y')]$. Aplicando TDG (proposición 9) 2 veces, resulta que $(Ax2.1)' \in \text{GEV}$.

Ax2.2. $[X'] \xRightarrow{CC} (X')$. Aplicando TDG, resulta que $(Ax2.2)' \in \text{GEV}$.

Ax2.3. $[X'] \xRightarrow{TCM} [[(X')]]$. Aplicando TDG, resulta que $(Ax2.3)' \in \text{GEV}$.

Ax2.4. Se acaba de probar que si $X \in \{Ax1.1, \dots, Ax1.13, Ax2.1, \dots, Ax2.3\}$, entonces $X' \in \text{GEV}$ $\xRightarrow{DCMGEV} [[X']]$. Por tanto, $(Ax2.4)' \in \text{GEV}$.

Proposición 15. (MP)' preserva validez en gamma-LD:

$$(\forall X, Y \in \text{FOR}) \{X', (X' (Y')) \in \text{GEV} \Rightarrow Y' \in \text{GEV}\}$$

Prueba:

Supóngase que $X', (X' (Y')) \in \text{GEV}$. Por lo que $\lambda \gg X', (X' (Y')) \xRightarrow{DC} X' ((Y')) \xRightarrow{DCC} X' Y' \xRightarrow{B} Y'$. Lo cual

significa que $\lambda \gg Y'$ es decir, $Y' \in \text{GEV}$. Por tanto, (MP)' preserva validez.

Proposición 16 (los teoremas de LD son válidos en gamma-LD):

$$(\forall Z \in \text{FOR}) (Z \in \text{TEO} \Rightarrow Z' \in \text{GEV})$$

Prueba: supóngase que $Z \in \text{TEO}$, por lo que existe una demostración de Z . La prueba se realiza por inducción sobre la longitud n de la demostración de Z .

Paso base (PB). $n=0$. Esto significa que Z es un axioma; por las proposiciones 13 y 14 se concluye que $Z' \in \text{GEV}$.

Paso inductivo (PI). Hipótesis inductiva (HI): Si la longitud de la demostración de $X \in \text{FOR}$ es t , con $0 < t < n$, entonces $X' \in \text{GEV}$. Si la demostración de Z tiene longitud n , entonces Z , que es el último elemento de la sucesión, o es un axioma, o bien se sigue de 2, anteriores utilizando la regla MP. En el primer caso, se procede como en el paso base. En el segundo, se tienen pruebas de X y de que $X \supset Z$, ambas pruebas de longitudes t y k , con $t < n$ y $k < n$. Aplicando la HI, se afirma que $X', (X' (Z')) \in \text{GEV}$; y utilizando la proposición 15, se concluye que $Z' \in \text{GEV}$.

Por el principio de inducción matemática, se concluye que:

$$(\forall Z \in \text{FOR}) (Z \in \text{TEO} \Rightarrow Z' \in \text{GEV})$$

Proposición 17 (los teoremas de LD son exactamente los gráficos válidos en gamma-LD):

$$(\forall Z \in \text{FOR}) (Z \in \text{TEO} \Leftrightarrow Z' \in \text{GEV})$$

Prueba: consecuencia directa de las proposiciones 12 y 16.

Lógica clásica y gráficos existenciales alfa-LC

Restringiendo las reglas de transformación de gamma-LD a alfa-LC, se obtiene el siguiente conjunto RTRAC de reglas primitivas de transformación

clásicas, con las cuales se construye el conjunto de *gráficos existenciales clásicos válidos* (GCV). Estas reglas, en esencia, coinciden con las presentadas por Peirce en *Reasoning and the Logic of Things* [9]:

1. Regla lambda ($R\lambda$)
2. Borrado (B)
3. Escritura (E)
4. Doble corte clásico (DCC)
5. Doble corte clásico λ (DCC λ)
6. Iteración (I)
7. Desiteración (D)
8. Iteración clásica (IC)
9. Desiteración clásica (DC)

Notación. La *proposición* N^* (en LC o alfa-LC) resulta de transformar la *proposición* N (en LD o gamma-LD), de manera que solo figuren las restricciones a la lógica clásica (LC).

Simplemente observando las proposiciones ya probadas; además, restringiendo en ellas las fórmulas, las reglas de transformación y los axiomas al caso clásico, se concluye que valen las siguientes proposiciones: 2^* , 4^* , 5^* , 7^* - 13^* y 15^* - 17^* (a la *proposición* N en LD corresponde la *proposición* N^* en LC):

Proposición 2*:

Para

$X, Y, Z \in FC$. $X \supset Y \in TEO \Rightarrow \sim Y \supset \sim X \in TEO$ y $Z \bullet X \supset Z \bullet Y \in TEO$

Proposición 4*:

$(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) [X, Y \in FC \Rightarrow X \bullet G_n(Y) \equiv X \bullet G_n(X \bullet Y) \text{ y } X \bullet Y^{Rn} \equiv X \bullet (X \bullet Y)^{Rn}]$

Proposición 5*:

- a. $(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) [X, Y \in FC \text{ y } X \supset Y \in TEO \Rightarrow F_{2n}(X) \supset F_{2n}(Y) \in TEO \text{ (} X^{R2n} \supset Y^{R2n} \in TEO \text{)}]$
- b. $(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) [X, Y \in FC \text{ y } X \supset Y \in TEO \Rightarrow F_{2n+1}(Y) \supset F_{2n+1}(X) \in TEO \text{ (} Y^{R2n+1} \supset X^{R2n+1} \in TEO \text{)}]$

Proposición 7*:

Para $X, Y \in \text{alfa-LC}$:

- a. $(\forall R \in RTRA) [X \in RP \text{ y } X \xRightarrow{R} Y] (\exists R' \in RTRA) [Y \in RI \text{ y } Y \xRightarrow{R'} X]$
- b. $(\forall R \in RTRA) \{[X \in RkP \text{ y } X \xRightarrow{R} Y \Rightarrow Y \in RkP] \text{ y } [X \in RIk \text{ y } X \xRightarrow{R} Y \Rightarrow Y \in RkI]\}$

Proposición 8*:

para $X_0, X_n \in \text{alfa-LC}$.

$X_0 \gg X_n \Rightarrow \{(X_0 \in RP \Rightarrow X_0 \gg X_n) \text{ y } (X_n \in RI \Rightarrow X_n \gg X_0)\}$

Proposición 9*:

TDG. Para $X, Y \in \text{alfa-LC}$. $X \gg Y \Rightarrow (X (Y))$

Proposición 10*:

TDIG. Para $X \in \text{alfa-LC}$.

- a. $X \gg () \Rightarrow (X)$
- b. $(X) \gg () \Rightarrow X$

Proposición 11*:

$(\forall X, Y \in FC) (X \xRightarrow{R} Y' \in RTRA \Rightarrow X \supset Y \in TEO)$

Proposición 12*:

$(\forall Z \in FC) (Z' \in GCV \Rightarrow Z \in TEO)$

Proposición 13*:

$(\forall X \in AxLC) (X' \in GCV)$

Proposición 15*:

$(\forall X, Y \in FC) \{X', (X' (Y')) \in GCV \Rightarrow Y' \in GCV\}$

Proposición 16*:

$(\forall Z \in FC) (Z \in TEO \Rightarrow Z' \in GCV)$.

Proposición 17*:

$(\forall Z \in FC) (Z \in TEO \Leftrightarrow Z' \in GCV)$. Es decir, los teoremas de la lógica proposicional clásica LC son exactamente los gráficos existenciales alfa-LC válidos.

Lógica intuicionista y gráficos alfa intuicionistas

El sistema deductivo para la lógica proposicional intuicionista (LI), donde $X, Y, X \in FI$, consta de los siguientes axiomas:

Ax1.li. $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$

- Ax1.2i. $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z))$
 Ax1.3i. $X \rightarrow (X \vee Y)$
 Ax1.4i. $Y \rightarrow (X \vee Y)$
 Ax1.5i. $(X \rightarrow Z) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow ((X \vee Y) \rightarrow Z))$
 Ax1.6i. $(X \wedge Y) \rightarrow X$
 Ax1.7i. $(X \wedge Y) \rightarrow Y$
 Ax1.8. $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow (Y \wedge Z)))$
 Ax1.9i. $X \rightarrow (\neg X \rightarrow Y)$
 Ax1.10i. $(X \rightarrow \neg Y) \rightarrow (Y \rightarrow \neg X)$
 Ax1.11i. $(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)$
 Ax1.12i. $(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (Y \rightarrow X)$
 Ax1.13i. $(X \rightarrow Y) \rightarrow [(Y \rightarrow X) \rightarrow (X \leftrightarrow Y)]$

Como única *regla de inferencia* se tiene el *modus ponens* (MPi): de X y $X \rightarrow Y$, se infiere Y .

Definición 7 (Axiomas de LI): $AxLI = \{Ax1.1i, \dots, Ax1.13i\}$. Esta presentación de la lógica intuicionista es una variante, bastante conocida, de la propuesta original de Arend Heyting en *Intuitionism. An introduction* [10].

Proposición 18 (conjunción intuicionista):

Para $\underline{X}, \underline{Y} \in FI$:

- $\underline{X} \equiv \underline{X}$
- $\underline{X} \cdot \underline{Y} \equiv \underline{X} \wedge \underline{Y}$

Prueba:

Parte a. Por AxR , se tiene que $\neg \neg \underline{X} \supset \sim \sim \underline{X}$, es decir, $\underline{X} \supset \sim \sim \underline{X}$; por DN, se obtiene que $\underline{X} \supset \underline{X}$. Por AxT , se tiene la recíproca $\underline{X} \supset \underline{X}$. Utilizando Ax1.13, se concluye que $\underline{X} \equiv \underline{X} \in TEO$.

Parte b. Por Ax1.6, se tiene que $(\underline{X} \cdot \underline{Y}) \supset \underline{X} \in TEO$; por $Ax+$ resulta $[(\underline{X} \cdot \underline{Y}) \supset \underline{X}] \in TEO$; por $MP+$ se obtiene que $(\underline{X} \cdot \underline{Y}) \supset \underline{X} \in TEO$; es decir, $(\underline{X} \wedge \underline{Y}) \supset \underline{X} \in TEO$; por la parte a, se tiene que $\underline{X} \equiv \underline{X}$; y utilizando EQ y SH, se infiere que $(\underline{X} \wedge \underline{Y}) \supset \underline{X} \in TEO$. De manera similar, a partir de Ax1.7, se prueba que $(\underline{X} \wedge \underline{Y}) \supset \underline{Y} \in TEO$. Utilizando Ax1.8, se deduce que $(\underline{X} \wedge \underline{Y}) \supset (\underline{X} \cdot \underline{Y}) \in TEO$. Por AxR se tiene $+(X \cdot Y) \supset (X \cdot Y)$, es decir, $(X \wedge Y) \supset (X \cdot Y)$.

Al tener los dos condicionales, se concluye que $(\underline{X} \wedge \underline{Y}) \equiv (\underline{X} \cdot \underline{Y}) \in TEO$.

Proposición 19 (los axiomas de la lógica proposicional intuicionista son teoremas de LD):

$$(\forall W \in FI) [W \in AxLI \Rightarrow W \in TEO]$$

Prueba:

Observación: si $R \in FI$, entonces por las definiciones de LI y de los conectivos intuicionistas, se sigue que $R = \underline{a}$ con $\underline{a} \in FAA$ o $R = \neg S$ con $S \in FI$, es decir, $R \in FA$, por lo tanto, si $R \in FI$ entonces $R = \underline{R}$.

Parte 1. Por Ax1.1, se tiene $X \supset (Y \supset X) \in TEO$; por $Ax+$, se infiere $+[X \supset (Y \supset X)] \in TEO$; por $MP+$, resulta $+X \supset +(Y \supset X) \in TEO$; por la proposición 18a, se tiene $+X \equiv X$; utilizando EQ y SH se deduce, $X \supset +(Y \supset X) \in TEO$, de nuevo por $Ax+$ se sigue $+[X \supset +(Y \supset X)] \in TEO$, es decir, $X \rightarrow (Y \rightarrow X) = Ax1.1i \in TEO$.

Parte 2. Supóngase que $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$, $X \rightarrow Y$, X . Por MP se infieren $Y \rightarrow Z$, Y , de nuevo por MP se sigue Z . Aplicando 3 veces TDi, se sigue $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Z)) = Ax1.2i \in TEO$.

Parte 3. Por Ax1.3, se tiene $X \supset (X \cup Y) \in TEO$, por $Ax+$, resulta que $+[X \supset (X \cup Y)] \in TEO$; por $MP+$, se obtiene que $+X \supset +(X \cup Y) \in TEO$; es decir $+X \supset (X \vee Y) \in TEO$; por la proposición 18a, se tiene $+X \equiv X$; y usando EQ y SH, se infiere $X \supset (X \vee Y) \in TEO$; por $Ax+$, resulta $+(X \supset (X \vee Y)) \in TEO$, es decir, $X \rightarrow (X \vee Y) = Ax1.3i \in TEO$.

Parte 4. De manera análoga a la parte 3, se prueba $Y \rightarrow (X \vee Y) = Ax1.4i \in TEO$.

Parte 5. Supóngase que $X \rightarrow Z$, $Y \rightarrow Z$, $X \vee Y$. Utilizando AxR y MP, se obtienen $X \supset Z$, $Y \supset Z$, $X \cup Y$; por Ax1.5 y MP, se sigue Z . Aplicando 3 veces TDi, se concluye que $(X \rightarrow Z) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow ((X \vee Y) \rightarrow Z)) = Ax1.5i \in TEO$.

Parte 6. Por Ax1.6 se tiene $(X \cdot Y) \supset X \in TEO$, por $Ax+$ resulta $+[X \cdot Y \supset X] \in TEO$, por $MP+$ se obtiene $+(X \cdot Y) \supset X \in TEO$, es decir $(X \wedge Y) \supset X \in TEO$, por la proposición 18a se tiene $+X \equiv X$, y usando EQ y SH se infiere $(X \wedge Y) \supset X \in TEO$, por

$Ax+$ resulta $+((X \wedge Y) \supset X) \in \text{TEO}$, es decir $(X \wedge Y) \rightarrow X = Ax1.6i \in \text{TEO}$.

Parte 7. De manera análoga a la parte 6, se prueba que $(X \wedge Y) \rightarrow Y = Ax1.7i \in \text{TEO}$.

Parte 8. Supóngase que $X \rightarrow Y$, $X \rightarrow Z$, X . Utilizando AxR y MP , se obtienen $X \supset Y$, $X \supset Z$, X ; utilizando $Ax1.8$ y MP , se infiere $Y \bullet Z$; por la proposición 18b, se llega a $Y \wedge Z$. Aplicando 3 veces TDi , se concluye que $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow (Y \wedge Z))) = Ax1.8i \in \text{TEO}$.

Parte 9. De manera análoga a la parte 1, se prueba $X \rightarrow (\neg X \rightarrow Y) = Ax1.9i \in \text{TEO}$.

Parte 10. Supóngase que $X \supset \neg Y$, por AxR se tiene que $\neg Y \supset \sim Y$; por SH se infiere $X \supset \sim Y$; por $Tras$, resulta $Y \supset \sim X$. Aplicando TD , se obtiene $(X \supset \neg Y) \supset (Y \supset \sim X) \in \text{TEO}$. Por la proposición 1, puede afirmarse que $+(X \supset \neg Y) \supset (Y \supset \sim X) \in \text{TEO}$; aplicando $MP+$ y MP , se deduce $+(X \supset \neg Y) \supset +(Y \supset \sim X) \in \text{TEO}$, por $MP+$ se tiene $+(Y \supset \neg X) \supset +(Y \supset \sim X) \in \text{TEO}$; es decir, $+(Y \supset \neg X) \supset +(Y \supset \neg X) \in \text{TEO}$; por la proposición 1, se infiere $+[+(Y \supset \neg X) \supset +(Y \supset \neg X)] \in \text{TEO}$ y por $MP+$, se sigue $++(Y \supset \neg X) \supset ++(+Y \supset \neg X) \in \text{TEO}$; por la proposición 18a, se tiene $+Y \equiv Y$ y $++(Y \supset \neg X) \equiv ++(+Y \supset \neg X)$; entonces, se deduce que $+(Y \supset \neg X) \supset ++(+Y \supset \neg X) \in \text{TEO}$, lo cual significa que $(Y \rightarrow \neg X) \supset (Y \rightarrow \neg X) \in \text{TEO}$; finalmente, por $Ax+$, se concluye $[(Y \rightarrow \neg X) \supset (Y \rightarrow \neg X)] \in \text{TEO}$; es decir, $(Y \rightarrow \neg X) \rightarrow (Y \rightarrow \neg X) = Ax1.10i \in \text{TEO}$.

Parte 11. Supóngase que $X \leftrightarrow Y$, X . Utilizando AxR y MP se obtiene $X \equiv Y$, aplicando $Ax1.11$ y MP se infiere $X \supset Y$; además, como se tiene X , entonces también se tiene Y . Aplicando 2 veces TDi , se concluye que $(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y) = Ax1.11i \in \text{TEO}$.

Parte 12. De manera análoga a la parte 11, se prueba $(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (Y \rightarrow X) = Ax1.12i \in \text{TEO}$.

Parte 13. Supóngase que $X \rightarrow Y$, $Y \rightarrow X$. Utilizando AxR y MP , se obtienen $X \supset Y$, $Y \supset X$, aplicando $Ax1.13$ y MP se infiere $X \equiv Y$. Si se supone X entonces por $Ax1.11$ y MP también se tiene Y . Aplicando TDi (proposición 9b), se obtiene $X \rightarrow Y$.

De manera similar se obtiene $Y \rightarrow X$. Estos dos resultados, por EQi , significan que $X \leftrightarrow Y$. Aplicando 2 veces TDi , se concluye que $(X \rightarrow Y) \rightarrow [(Y \rightarrow X) \rightarrow (X \leftrightarrow Y)] = Ax1.2i \in \text{TEO}$.

Proposición 20 (el modus ponens intuicionista vale en LD):

Para $X, Z \in FI$:

$MPi. X \rightarrow Z$ y $X \supset Z$

Prueba: supóngase que se tienen $X \rightarrow Z$ y X , por lo que resulta que $+(X \supset Z)$; por AxR y MP , se infiere $X \supset Z$; además, como se tiene el antecedente por MP , se concluye el consecuente Z .

Definición 8 (teorema de LI): Para $X \in FI$, se dice que X es un *teorema de LI* ($X \in \text{TEOI}$) si y solamente si existe una *demostración de X*. Es decir, X es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas intuicionistas, tales que cada una de ellas es un axioma o bien se infiere de dos fórmulas anteriores, utilizando la regla de inferencia MPi .

Proposición 21 (LD incluye LI):

$(\forall X \in FI) [X \in \text{TEOI} \Rightarrow X \in \text{TEO}]$

Prueba: por inducción matemática sobre la longitud n de la demostración de X en LI .

Paso base (PB). $n=1$. Significa que $X \in AxLI$; por la proposición 19, se infiere que $X \in \text{TEO}$.

Paso inductivo (PI). Hipótesis inductiva (HI): $W \in \text{TEOI} \Rightarrow W \in \text{TEO}$, donde k es la longitud de la demostración de W y $0 < k < n$. Supóngase que la demostración de X tiene longitud n , entonces que X es un axioma, o bien X es consecuencia de pasos anteriores, utilizando la regla de inferencia MPi . En el primer caso, se procede como en el paso base. En el segundo, se tienen, para alguna fórmula Z , demostraciones de Z y de $Z \rightarrow X$, por lo que $Z \rightarrow X \in \text{TEOI}$ y $Z \in \text{TEOI}$; ambas demostraciones de longitud menor que n ; por HI , se deduce que $Z \rightarrow X \in \text{TEO}$ y $Z \in \text{TEO}$; asimismo, aplicando MPi , se concluye que $Z \in \text{TEO}$.

Finalmente, por el principio de inducción matemática, se ha probado que $(\forall X \in FI) [X \in \text{TEOI} \Rightarrow X \in \text{TEO}]$.

Parte e. $X[\dots[\dots[Y(XZ)]\dots]\dots] \xRightarrow{\text{IF DeL}} X[\dots[\dots[X Y(Z)]\dots]\dots] \xRightarrow{\text{DF}} X[\dots[\dots[Y(Z)]\dots]\dots].$

Parte f. $[X] \in \text{RP} \Rightarrow [X \quad ([\])] \xLeftrightarrow{\text{Def } \neg \lambda} [X \quad ([\lambda])] \xLeftrightarrow{\text{CCR}} [X \quad ([\lambda])] \xLeftrightarrow{\text{DCI}} [X \lambda] \xLeftrightarrow{\text{Def } \neg \lambda} [X];$ además, $[X] \in \text{RP} \Rightarrow [X] \xLeftrightarrow{\text{EL}} [X([\])].$ Por lo que, $[X] \in \text{RP} \Rightarrow [X \quad ([\])] \xLeftrightarrow{\text{}} [X].$ Por otro lado, $[X] \in \text{RI} \Rightarrow [X] \xLeftrightarrow{\text{Def } \neg \lambda} [X \lambda] \xLeftrightarrow{\text{DCI}} [X([\lambda])] \xLeftrightarrow{\text{CCR}} [X([\lambda])] \xLeftrightarrow{\text{Def } \neg \lambda} [X([\])];$ además, $[X] \in \text{RI} \Rightarrow [X([\])] \xLeftrightarrow{\text{}} [X],$ por lo que $[X] \in \text{RI} \Rightarrow [X([\])] \xLeftrightarrow{\text{BL}} [X].$ Se concluye que $[X([\])] \xLeftrightarrow{\text{RaN}} [X].$

Parte g. La prueba se presenta después de la proposición 10**.

En lo que sigue, se utilizan los siguientes resultados de LI presentados por van Dalen [11]. Sean $X, Y, Z \in \text{FI}$ ($X \Rightarrow Y$ significa que de X se infiere Y , mientras que $X \Leftrightarrow Y$ significa que $X \Rightarrow Y$ y $Y \Rightarrow X$):

Introducción ($I\wedge$): $X \text{ e } Y \Rightarrow X \wedge Y$

Eliminación ($E\wedge$): $X \wedge Y \Rightarrow X$

Equivalencia (EQi): $X \Leftrightarrow Y \Leftrightarrow (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$

Transposición (Trasi): $X \Rightarrow Y \Rightarrow \neg Y \Rightarrow \neg X$

Implicación (Impi): $\neg X \vee Y \Rightarrow X \Rightarrow Y \Rightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$

Idempotencia ($\text{Idem } \vee$): $X \vee X \Leftrightarrow X$

Teorema de deducción (TDi): Si $X \Rightarrow Y$, entonces $X \Rightarrow Y$

Idempotencia ($\text{Idem } \wedge$): $X \wedge X \Leftrightarrow X$

Demostración indirecta (DIi): $X \Rightarrow (Y \wedge \neg Y) \Rightarrow \neg X$

Conmutatividad ($\text{Com } \wedge$): $X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$

Asociatividad ($\text{Aso } \wedge$): $X \wedge (Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$

Notación: la *proposición* N^{**} (en LI o alfa-LI) es el resultado de transformar la *proposición* N (en LD o gamma-LD), de manera que solo figuren las restricciones a la *lógica intuicionista* (LI).

Simplemente observando las proposiciones ya probadas y restringiendo las fórmulas, las reglas de transformación y los axiomas al caso intuicionista, se concluye que *siguen siendo* válidas las siguientes

proposiciones: 3**, 5**, 7**-10**, 12**, 16** y 17**. Solo deben probarse las proposiciones 2**, 21g, 11**, 14** y 15**. Las proposiciones 4, 6 y 13 no se requieren en lo que resta de esta sección.

Proposición 2 (trasposición y ampliación):**

Para $X, Y, Z \in \text{FI}$, si $X \Rightarrow Y \in \text{TEOI}$ entonces:

- $\neg Y \Rightarrow \neg X \in \text{TEOI}$
- $Z \wedge X \Rightarrow Z \wedge Y \in \text{TEOI}$
- $(X \wedge Y \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y \Rightarrow X \wedge Z) \in \text{TEOI}$

Prueba:

Supóngase que $X \Rightarrow Y \in \text{TEOI}$.

Parte a. Resulta de aplicar Trasi en $X \Rightarrow Y$.

Parte b. Supóngase $Z \wedge X$, por $E\wedge$, se infieren Z y X ; por MPi resulta Y ; por $I\wedge$ se afirma $Z \wedge Y$; finalmente, por TDi , se concluye $Z \wedge X \Rightarrow Z \wedge Y \in \text{TEOI}$.

Parte c. Supóngase que $X \wedge Y \Rightarrow Z$; supóngase que $X \wedge Y$, por $E\wedge$ resultan X y Y ; por MPi , se sigue Z ; por $I\wedge$, resulta $X \wedge Z$; aplicando TDi , se obtiene $X \wedge Y \Rightarrow X \wedge Z$. Aplicando TDi de nuevo, se concluye que $(X \wedge Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \wedge Y \Rightarrow X \wedge Z) \in \text{TEOI}$. De manera similar, se prueba la recíproca y, por tanto, aplicando EQi , se deriva $(X \wedge Y \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (X \wedge Y \Rightarrow X \wedge Z) \in \text{TEOI}$.

Se restringe la función F de FI en FI, de la siguiente manera ($Y, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n+1} \in \text{FI}$):

$$F_0(Y) = Y_0 \wedge Y$$

$$F_1(Y) = Y_1 \wedge \neg F_0(Y) = Y_1 \wedge \neg(Y_0 \wedge Y)$$

$$F_{n+1}(Y) = Y_{n+1} \wedge \neg F_n(Y)$$

Proposición 3 (principio de inducción estructural para iteración y desiteración –PIE-ID):**

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) [X, Y \in \text{FI} \Rightarrow X \wedge F_n(Y) \Leftrightarrow X \wedge F_n(X \wedge Y) \in \text{TEO} \quad (X \wedge Y^{\text{Rn}} \Leftrightarrow X \wedge (X \wedge Y)^{\text{Rn}} \in \text{TEO})]$$

Proposición 5 (principio de inducción estructural para regiones pares e impares –PIE-RPI):**

- a. $(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) [X, Y \in FI \text{ y } X \rightarrow Y \in TEO \Rightarrow F_{2n}(X) \rightarrow F_{2n}(Y) \in TEO \text{ (} X^{R_{2n}} \rightarrow Y^{R_{2n}} \in TEO \text{)}]$
- b. $(\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) [X, Y \in FI \text{ y } X \rightarrow Y \in TEO \Rightarrow F_{2n+1}(Y) \rightarrow F_{2n+1}(X) \in TEO \text{ (} Y^{R_{2n+1}} \rightarrow X^{R_{2n+1}} \in TEO \text{)}]$

Proposición 7.** (Reversión de las reglas de transformación). Para $X, Y \in \text{alfa-LI}$:

- a. $(\forall R \in \text{RTRA-LI}) [X \in RP \text{ y } X \xrightarrow{R} Y] (\exists R' \in \text{RTRA}) [Y \in RI \text{ y } Y \xrightarrow{R'} X]$
- b. $(\forall R \in \text{RTRA-LI}) \{[X \in RP_k \text{ y } X \xrightarrow{R} Y \Rightarrow Y \in R_k P] \text{ y } [X \in R_k I \text{ y } X \xrightarrow{R} Y \Rightarrow Y \in R_k I]\}$

Proposición 8** (Principio de contraposición):

Para $X_0, X_n \in \text{alfa-LI}$:
 $X_0 \gg X_n \Rightarrow \{(X_0 \in RP \Rightarrow X_0 \gg X_n) \text{ y } (X_n \in RI \Rightarrow X_n \gg X_0)\}$

Proposición 9** (Teorema de deducción en alfa-LI -TDGi):

Para $X, Y \in \text{alfa-LI}$: $X \gg Y \Rightarrow [X(Y)]$

Proposición 10** (Teorema de demostración indirecta en alfa-LI -TDIGi):

Para $X \in \text{alfa-LI}$:

- a. $X \gg [] \Rightarrow [X]$
- b. $[X] \gg [] \Rightarrow [[X]]$
- c. $[[X]] \gg [] \Rightarrow [X]$

Prueba de parte g de la proposición 22: $[X(Y)(Z)]$ no es un gráfico alfa-LI, se utilizan versiones extendidas de las reglas de transformación de gráficos):

$[X(Y)(Z)] X [[[(Y)(Z)]]] \xrightarrow{DF} [(Y)(Z)] X [[[(Y)(Z)]]]$

$\xrightarrow{DeL} [(Y)(Z)] X [[[(Y)(Z)]]] \xrightarrow{B} [[[(Y)(Z)]]] \xrightarrow{R} [[[]]] \xrightarrow{R} []$

Se ha probado que $[X(Y)(Z)] X [[[(Y)(Z)]]] \gg []$.

Por TDIG (proposición 10**) resulta que

$[X(Y)(Z)] \gg [X [[[(Y)(Z)]]]] \xrightarrow{R} [X [[[(Y)(Z)]]]] \xrightarrow{DCI} [X ((Y)(Z))]$.

Por tanto

$[X(Y)(Z)] \xrightarrow{R} [X ((Y)(Z))]$

$[X ((Y)(Z))] X [[[(Y)(Z)]]] \xrightarrow{DF} [[[(Y)(Z)]]] X [[[(Y)(Z)]]]$

$\xrightarrow{R} [(Y)(Z)] X [[[(Y)(Z)]]] \xrightarrow{R} [(Y)(Z)] X [[[(Y)(Z)]]] \xrightarrow{R} [(Y)(Z)] X [[[(Y)(Z)]]]$

$\xrightarrow{CCR} [[Y](Z)] X [Y](Z) \xrightarrow{DF} [] X [Y](Z) \xrightarrow{B} []$

Se ha probado que $[X ((Y)(Z))] X [[[(Y)(Z)]]] \gg []$.

Por TDIGi, proposición 10**, resulta:

$[X ((Y)(Z))] \gg [X [[[(Y)(Z)]]]] \xrightarrow{R} [X [[[(Y)(Z)]]]] \xrightarrow{DCI} [X(Y)(Z)]$

Por tanto,

$[X ((Y)(Z))] \xrightarrow{R} [X(Y)(Z)]$.

Así pues, se concluye, finalmente, que $[X ((Y)(Z))] \xrightarrow{Rad} [X(Y)(Z)]$.

Proposición 11** (validez en LI de las reglas primitivas de transformación):

Para $X, Y \in FI$:

$(\forall R \in \text{RTRA-LI}) (\exists T \in \text{TEOI}) [X' \xrightarrow{R} Y' \Rightarrow T = X \supset Y]$

Prueba:

Regla 1. Regla lambda (Rλ):

$\lambda \in GIV$

$\lambda = Ax1.1i'$

$Ax1.1i \in \text{TEOI}$

Regla 2. Borrado (B):

$X'Y' \in RP \Rightarrow (X'Y' \xrightarrow{B} X') \text{ y } (X'Y' \xrightarrow{B} Y')$

Regla 4. Escritura: (E): $X'Y' \in RI \Rightarrow (X' \xrightarrow{E} X'Y') \text{ y } (Y' \xrightarrow{E} X'Y')$.

Por Ax1.6i y Ax1.7i, se tienen $(X \wedge Y) \rightarrow X \in \text{TEOI}$ y $(X \wedge Y) \rightarrow Y \in \text{TEOI}$; por la proposición 5**, se

concluye que $(X \wedge Y)^{R_{2n}} \rightarrow Y^{R_{2n}} \in \text{TEOI}$
 y $(X \wedge Y)^{R_{2n}} \rightarrow X^{R_{2n}} \in \text{TEOI}$,
 $Y^{R_{2n+1}} \rightarrow (X \wedge Y)^{R_{2n+1}} \in \text{TEOI}$ y
 $X^{R_{2n+1}} \rightarrow (X \wedge Y)^{R_{2n+1}} \in \text{TEOI}$

Regla 5. Escritura de lazo (EL): $X' \in \text{RI} \Rightarrow [X'] \xRightarrow{\text{EL}} [X' (Y')]$

Regla 3. Borrado de lazo (BL): $X' \in \text{RP} \Rightarrow [X' (Y')] \xRightarrow{\text{BL}} [X']$

Por Ax1.9i, se tiene $\neg X \rightarrow (X \rightarrow Y) \in \text{TEOI}$, aplicando la proposición 5**, se concluye que $(\neg X)^{R_{2n}} \rightarrow (X \rightarrow Y)^{R_{2n}} \in \text{TEOI}$ y $(X \rightarrow Y)^{R_{2n+1}} \rightarrow (\neg X)^{R_{2n+1}} \in \text{TEOI}$.

Regla 6. Rizo (R): $[\lambda (X')] \xleftrightarrow{R} X'$

Por Ax1.1i, se tiene que $X \rightarrow (((Y \wedge Y) \rightarrow Y) \rightarrow X) \in \text{TEOI}$. Supóngase que $((Y \wedge Y) \rightarrow Y) \rightarrow X$; por Ax1.6i, se tiene que $(Y \wedge Y) \rightarrow Y$; por MPI, se infiere X ; por TDi, se obtiene que $((((Y \wedge Y) \rightarrow Y) \rightarrow X) \rightarrow X) \in \text{TEOI}$; además, como se tiene la recíproca, entonces $((((Y \wedge Y) \rightarrow Y) \rightarrow X) \leftrightarrow X) \in \text{TEOI}$. Aplicando la proposición 5**, se concluye entonces que $(X)^{R_{2n}} \leftrightarrow ((Y \wedge Y) \rightarrow Y) \rightarrow X)^{R_{2n}} \in \text{TEOI}$ y $((Y \wedge Y) \rightarrow Y) \rightarrow X)^{R_{2n+1}} \leftrightarrow X^{R_{2n+1}} \in \text{TEOI}$, es decir, $((Y \wedge Y) \rightarrow Y) \rightarrow X)^{R_n} \leftrightarrow X^{R_n} \in \text{TEOI}$.

Regla 7. Cambio de corte en rizo (CCR):

$[X' (Y')] \in \text{RP} \Rightarrow [X' (Y')] \xRightarrow{\text{CCR}} [X' [Y']]$ y $[X' (Y')] \in \text{RI} \Rightarrow [X' [Y']] \xRightarrow{\text{CCR}} [X' (Y')]$.

Por Impi, se tiene $(X \rightarrow Y) \rightarrow \neg(X \wedge \neg Y) \in \text{TEOI}$; aplicando la proposición 5**, se concluye que $(X \rightarrow Y)^{R_{2n}} \rightarrow \neg(X \wedge \neg Y)^{R_{2n}} \in \text{TEOI}$ y $(\neg(X \wedge \neg Y))^{R_{2n+1}} \rightarrow (X \rightarrow Y)^{R_{2n+1}} \in \text{TEOI}$.

Regla 8. Iteración (I): $X' \xRightarrow{I} X'X'$

Regla 12. Desiteración (D): $X'X' \xRightarrow{D} X'$

Por Idem $\wedge$, se tiene $(X \wedge X) \leftrightarrow X \in \text{TEOI}$; aplicando la proposición 5**, se concluye que $(XX)^{R_{2n}} \leftrightarrow X^{R_{2n}} \in \text{TEOI}$ y $(XX)^{R_{2n+1}} \leftrightarrow X^{R_{2n+1}} \in \text{TEOI}$.

$R_{2n+1} \leftrightarrow X^{R_{2n+1}} \in \text{TEOI}$, es decir, $(XX)^{R_n} \leftrightarrow X^{R_n} \in \text{TEOI}$.

Regla 10. Iteración fuerte (IF): $X' [\dots[Y']\dots] \xRightarrow{\text{IF}} X' [\dots[X'Y']\dots]$

Regla 14. Desiteración fuerte (DF): $X' [\dots[X'Y']\dots] \xRightarrow{\text{DF}} X' [\dots[Y']\dots]$

Por la proposición 3**, se tiene que, para $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $X \wedge Y^{R_n} \leftrightarrow X \wedge (X \wedge Y)^{R_n}$.

Regla 11. Iteración fuerte en el lazo (IeL): $[X' Y' (Z')] \xRightarrow{\text{IeL}} [X' Y' (X' Z')]$.

Regla 15. Desiteración en el lazo (DeL): $[X' Y' (X' Z')] \xRightarrow{\text{DeL}} [X' Y' (Z')]$.

Por la proposición 2c**, se tiene $(XY \rightarrow Z) \leftrightarrow (XY \rightarrow XZ) \in \text{TEOI}$; por la proposición 5**, resulta que $(XY \rightarrow Z)^{R_{2n}} \leftrightarrow (XY \rightarrow XZ)^{R_{2n}} \in \text{TEOI}$ y $(XY \rightarrow XZ)^{R_{2n+1}} \leftrightarrow (XY \rightarrow Z)^{R_{2n+1}} \in \text{TEOI}$; de ese modo, $(XY \rightarrow Z)^{R_n} \leftrightarrow (XY \rightarrow XZ)^{R_n} \in \text{TEOI}$.

Regla 9. Iteración de lazo (IdL): $[X' (Y')] \xRightarrow{\text{IdL}} [X' (Y') (Y')]$.

Regla 13. Desiteración de lazo (DdL): $[X' (Y') (Y')] \xRightarrow{\text{DdL}} [X' (Y')]$.

Por Idemp $\vee$, se tiene que $Y \leftrightarrow (Y \vee Y) \in \text{TEOI}$; por lo que $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (X \rightarrow (Y \vee Y)) \in \text{TEOI}$. Aplicando la proposición 5**, se concluye que $(X \rightarrow Y)^{R_{2n}} \leftrightarrow (X \rightarrow (Y \vee Y))^{R_{2n}} \in \text{TEOI}$ y $(X \rightarrow (Y \vee Y))^{R_{2n+1}} \leftrightarrow (X \rightarrow Y)^{R_{2n+1}} \in \text{TEOI}$, es decir, $(X \rightarrow Y)^{R_n} \leftrightarrow (X \rightarrow (Y \vee Y))^{R_n} \in \text{TEOI}$. Lo anterior significa que $[X' (Y')] \leftrightarrow [X' ((Y') (Y'))] \xRightarrow{\text{RaN}} [X' (Y') (Y')]^{1*}$.

Proposición 12 (los gráficos válidos en gamma-LD son teoremas en LD):**

^{1*} Observar en la proposición 22g que puede aplicarse la regla RaD, puesto que, para ser garantizada, se requieren las reglas primitivas 14, 15, 2, 6 y 7, las cuales ya se garantizaron en los párrafos precedentes de la prueba de esta proposición (11**).

$$(\forall Z \in \text{FOR}) (Z' \in \text{GIV} \Rightarrow Z \in \text{TEOI})$$

Prueba: si $\lambda \gg X_n'$, entonces existen $R_1, \dots, R_n \in \text{RTRA-LI}$, y existen $\lambda, X_2', \dots, X_{n-1}' \in \text{alfa-LI}$, tales que $\lambda R_1 X_1' R_2 X_2' \dots X_{n-1}' R_n X_n'$; y se dice que la longitud de la transformación de $\lambda \gg X_n'$ es n .

La prueba se realiza por inducción, sobre la longitud n de la transformación.

Paso base (PB). $n = 1$. Significa que solo se aplicó una de las reglas primitivas, y R_1 tiene que ser de la forma $\lambda \xrightarrow{R1} X_1'$. Por la proposición 11**, se infiere que $\text{Ax1.1} \rightarrow X_1 \in \text{TEO}$; luego por MPi, $X_1 \in \text{TEO}$.

Paso inductivo (PI). Hipótesis inductiva (HI): $(\forall n > 1) [\lambda \gg X_n' \Rightarrow X_n \in \text{TEOI}]$. Si $\lambda \gg X_{n+1}'$, entonces $\lambda R_1 X_1' R_2 X_2' \dots X_{n-1}' R_n X_n' R_{n+1} X_{n+1}'$; es decir, $\lambda R_1 X_1' R_2 X_2' \dots X_{n-1}' R_n X_n'$ y $X_n' R_{n+1} X_{n+1}'$, por lo que $\lambda \gg X_n'$ y $X_n' R_{n+1} X_{n+1}'$. Aplicando la HI y TDG (proposición 11**) se infieren $X_n \in \text{TEOI}$ y $X_n \rightarrow X_{n+1} \in \text{TEOI}$, aplicando MPi se concluye que $X_{n+1} \in \text{TEOI}$. Por el principio de inducción matemática, se tiene que $(\forall Z \in \text{FOR}) (Z' \in \text{GEV} \Rightarrow Z \in \text{TEO})$.

Proposición 14 (AxLI válidos en alfa-LI):**

$$(\forall X \in \text{LI}) (X \in \text{AxLi} \Rightarrow X' \in \text{GIV})$$

Prueba:

Ax1.1:

$$\lambda \xrightarrow{R} [(\lambda)] \xrightarrow{R} [((()))] \xrightarrow{E} [X' ([Y' ()])] \xrightarrow{\text{IeL}} [X' ([Y' (X')])]$$

Por tanto, $(\text{Ax1.1})' \in \text{GEV}$.

Ax1.2:

$$[X'([Y'(Z')])] [X'(Y')] X' \xrightarrow{\text{DF}} [X'([Y'(Z')])] [(Y')] X' \xrightarrow{R} [X'([Y'(Z')])] Y' X'$$

$$\xrightarrow{\text{DF}} [X'([(Z')])] Y' X' \xrightarrow{R} [X'(Z')] Y' X' \xrightarrow{\text{DF}} [(Z')] Y' X' \xrightarrow{R} Z' Y' X' \xrightarrow{B} Z'$$

Aplicando TDGi (proposición 9**) 3 veces, resulta que $(\text{Ax1.2})' \in \text{GIV}$.

Ax1.3 y Ax1.4:

$$\lambda \xrightarrow{R} [(\lambda)] \xrightarrow{R} [((()))] \xrightarrow{E} [X' ([Y' ()])] \xrightarrow{\text{IeL}} [X' (X' ([Y' ()]))]$$

$$\xrightarrow{\text{IF}} [X'(X' [X' (Y') ()])] \xrightarrow{\text{IeL}} [X'(X' [X' (Y') (X')])]$$

$$\xrightarrow{\text{DF}} [X'(X' [(Y') (X')])] \xrightarrow{\text{DeL}} [X' ([(Y') (X')])]$$

Por tanto, $(\text{Ax1.3})', (\text{Ax1.4})' \in \text{GIV}$.

Ax1.5:

$$[X'(Z')] [Y'(Z')] [(X')(Y')] [(Z')] \xrightarrow{R} [X' (Z')] [Y' (Z')] [(X')(Y')] [Z']$$

$$\xrightarrow{\text{CCR}} [X'[Z']] [Y'[Z']] [(X') [Y']] [Z'] \xrightarrow{\text{DF}} [X'] [Y'] [X'] [Y'] [Z']$$

$$\xrightarrow{\text{DF}} [X'] [Y'] [] [Z'] \xrightarrow{B} []$$

Por TDIGi (proposición 10**), se infiere que $[X'(Z')] [Y'(Z')] [(X')(Y')] \gg [[(Z')]] \xrightarrow{\text{TCI}} [(Z')] \xrightarrow{R} Z'$. Por TDGi (proposición 9**), se infiere que $[X'(Z')] [Y'(Z')] \gg [[(X')(Y')] (Z')]$. Por tanto, $(\text{Ax1.5})' \in \text{GIV}$.

Ax1.6 y Ax1.7:

$$\lambda \xrightarrow{R} [()] \xrightarrow{E} [X'Y' ()] \xrightarrow{\text{IeL}} [X'Y'(X')]. \text{ Por tanto, } (\text{Ax1.6})', (\text{Ax1.7})' \in \text{GIV}.$$

Ax1.8:

$$[X'(Y')] [X'(Z')] X' \xrightarrow{\text{DF}} [(Y')] [(Z')] X' \xrightarrow{R} Y' Z' X' \xrightarrow{B} Y' Z'. \text{ Aplicando TDGi 2 veces, resulta que } (\text{Ax1.8})' \in \text{GIV}.$$

Ax1.9:

$$\lambda \xrightarrow{R} [(\lambda)] \xrightarrow{R} [((()))] \xrightarrow{E} [X' ((() (Y')))] \xrightarrow{\text{CCR}} [X' ([() (Y')])] \xrightarrow{\text{IeL}} [X' (X' [() (Y')])]$$

$$\xrightarrow{\text{IF}} [X'(X' [(X') (Y')])] \xrightarrow{\text{DeL}} [X' ([X'] (Y'))]$$

Por tanto, $(\text{Ax1.9})' \in \text{GIV}$.

Ax1.10:

$$[X' ([Y'])] Y' \xrightarrow{\text{IF}} [X' ([Y']) Y'] Y' \xrightarrow{\text{IeL}} [X' ([Y']) Y'] Y' \xrightarrow{\text{DeL}} [X' ([] Y') Y'] Y'$$

$$\xrightarrow{\text{DeL}} [X' ([]) Y'] Y' \xrightarrow{\text{DF}} [X' ([]) Y'] Y' \xrightarrow{B} [X' ([])] \xrightarrow{\text{RaN}} [X']$$

Aplicando TDGi2 veces, resulta $(Ax1.10)' \in GIV$.

Ax1.11:

$$(X \leftrightarrow Y)' \xrightarrow{\text{Definición}} (X \rightarrow Y)' (Y \rightarrow X)' \xrightarrow{B} (X \rightarrow Y)'.$$

Por tanto, $(Ax1.11)' \in GIV$.

Ax1.12:

$$(X \leftrightarrow Y)' \xrightarrow{\text{Definición}} (X \rightarrow Y)' (Y \rightarrow X)' \xrightarrow{B} (Y \rightarrow X)'.$$

Por tanto, $(Ax1.12)' \in GIV$.

Ax1.13:

$(X \rightarrow Y)' (Y \rightarrow X)' \xrightarrow{\text{Definición}} (X \leftrightarrow Y)'$. Aplicando TDGi dos veces, resulta que $(Ax1.13)' \in GIV$.

Proposición 15 [(MPi)' preserva validez en alfa-LI]:**

$$X' \in GIV \text{ y } (X \rightarrow Y)' \in GIV \Rightarrow Y' \in GIV$$

Prueba: supóngase que $X' \in GIV$ y $(X \rightarrow Y)' \in GIV$. Por lo que $\lambda \gg X' [X' (Y')]' \xrightarrow{DF} X' [(Y')]' \xrightarrow{R} X' Y' \xrightarrow{B} Y'$. Lo cual significa que $\lambda \gg Y'$, es decir, $Y' \in GIV$. Por tanto, $(MPi)'$ preserva validez.

Proposición 16 (los teoremas de LI son válidos en alfa-LI):**

$$(\forall Z \in FI) (Z \in TEO \Rightarrow Z' \in GIV)$$

Proposición 17 (los teoremas de LI son exactamente los gráficos válidos en alfa-LI):**

$$(\forall Z \in FI) (Z \in TEO \Leftrightarrow Z' \in GIV)$$

Es decir, los teoremas de la lógica proposicional intuicionista (LI) son exactamente los gráficos existenciales válidos en alfa-LI.

Consistencia de LD y de gamma-LD

Sea $\{\}$ la función de traducción de gamma-LD en alfa-LC, definida así:

1. $[X]'' = (X)'' = (X'')$
2. $\{X Y\}'' = X'' Y''$
3. $\lambda'' = \lambda$

Proposición 23 (las reglas de gamma-LD se transforman en reglas de gamma-LC):

$$X \in RTRA \Rightarrow X'' \in RTRAC$$

Prueba:

1. $\{R\lambda\}'' = R\lambda$
2. $B'' = B$
3. $E'' = E$
4. $DCC'' = DCC$
5. $CC'' = \{[X] \xrightarrow{CC} (X)\}'' = (X'') \xrightarrow{\text{Identidad}} (X'')$
6. $DCMGEV'' = DCC$
7. $DCMF'' = DCC$
8. $I'' = I$
9. $D'' = D$
10. $IC'' = IC$
11. $DC'' = DC$
12. $IF'' = IC$
13. $DF'' = DC$.

Proposición 24 (los gráficos de gamma-LD se transforman en gráficos de gamma-LC):

$$\text{Para } X_n \in \text{gama-LD}, X_n \in \text{GEV} \Rightarrow X_n'' \in \text{GCV}$$

Prueba: si $X_n \in \text{GEV}$, entonces $\lambda \gg X_n$, es decir, existen $X_i \in \text{gama-LD}$ y $R_i \in \text{RTRA}$, con $0 < i < n+1$, tales que $\lambda R_1 X_1 R_2 X_2 \dots X_{n-1} R_n X_n$. Como $R_i \in \text{RTRA}$, por la proposición 23, resulta que $R_i'' \in \text{RTRAC}$; además, $X_i'' \in \text{alfa-LC}$, de modo que se obtiene $\lambda R_1'' X_1'' R_2'' X_2'' \dots X_{n-1}'' R_n'' X_n''$, por lo que $\lambda \gg X_n''$, es decir, $X_n'' \in \text{GCV}$.

Proposición 25 (consistencia de LD y de gamma-LD):

1. $() \notin \text{GEV}$
2. $[] \notin \text{GEV}$
3. LD es consistente
4. LI es consistente

Prueba:

Parte a. Si $() \in \text{GEV}$, entonces por la proposición 24 se deduce $()'' \in \text{GCV}$, por lo que

$() \in \text{GCV}$; por la proposición 17*; resulta que $\sim \text{Ax1.1} \in \text{TEO}$; esto significa que existe $Z \in \text{FC}$ tal que $Z \bullet \sim Z$ es un teorema de LC, lo cual es imposible, puesto que LC es consistente. Por tanto, $() \notin \text{GEV}$, dicho de otra manera, *gamma-LD es consistente*.

Parte b. Si $[] \in \text{GEV}$, entonces, por la regla CC, se sigue $() \in \text{GCV}$, lo cual contradice la parte a. Por tanto, $[] \notin \text{GEV}$.

Parte c. Si LD es inconsistente, entonces existe $X \in \text{FOR}$, tal que $X \bullet \sim X \in \text{TEO}$; por la proposición 17, se infiere que $(X \bullet \sim X)' \in \text{GEV}$, es decir, $() \in \text{GEV}$, lo cual contradice la parte a. Por tanto, se garantiza la *consistencia de LD*.

Parte d. Si LI es inconsistente, entonces existe $X \in \text{FOR}$, tal que $X \bullet \sim X \in \text{TEOI}$; por la proposición 21, se infiere que $X \bullet \neg X \in \text{TEO}$, es decir, LD es inconsistente, lo cual contradice la parte c. Por tanto, se garantiza la *consistencia de LI*.

Conclusiones

Conclusión 1 (restricción de gamma-LD a alfa-LC). Por la proposición 17*, si los gráficos existenciales de gamma-LD se restringen alfa-LD, resulta que el conjunto de gráficos válidos, en el lenguaje $\{\sim, \supset, \bullet, \cup, \equiv\}$, coincide con los gráficos existenciales *alfa-Peirce* [1]. Es decir, con el conjunto de teoremas del cálculo proposicional clásico. Por lo que, los teoremas del cálculo proposicional clásico son válidos en LD.

Conclusión 2 (restricción de gamma-LD a alfa-LI). Por la proposición 17**, si los gráficos existenciales de gamma-LD se restringen alfa-LI, en el lenguaje $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, resulta que el conjunto de gráficos válidos coincide con los gráficos existenciales *alfa intuicionistas* presentados por Oostra [3]; es decir, con el conjunto de teoremas del cálculo proposicional intuicionista. Por lo que los teoremas del cálculo proposicional intuicionista son válidos en LD.

Platón en *Crátilo*, define la verdad como “el discurso que dice las cosas como son es verdadero; y el que las dice como no son es falso” [12]. En el libro IV de *Metafísica* (1011b), Aristóteles define el

concepto de verdad de la siguiente manera: “Decir de *lo que es* que es, y de *lo que no es* que no es, es *lo verdadero*; decir de *lo que es* que no es, y de *lo que no es* que es, es *lo falso*” [4].

Tomando estas definiciones como axiomas, en Sierra-Aristizábal [13] se construye el sistema *lógica básica para la verdad aristotélica* (LBVA; o LBPCPo), de lo que resulta que LD es una extensión propia de este. Por lo que, en el sistema LD, pueden modelarse estas definiciones, interpretando $+X$ como *X es verdadero*; $\neg X$ como *X es falso*; $*X$ como *decir X*; X como *X es*; y $\sim X$ como *X no es*. La definición de *verdad aristotélica* estaría codificada por la fórmula $(V \bullet *V) \equiv +V$, es decir, por el gráfico $(V(((V)))((V)))((V)))((V)))((V)))((V)))((V)))$; y la definición de *falsedad aristotélica* estaría codificada por la fórmula $(\sim F \bullet *F) \equiv \neg F$, es decir, por el gráfico $((F)(((F)))((F)))((F)))((F))((F))(((F)))((F)))$.

Conclusión 3 (verdad y falsedad aristotélica en LD):

Para $V, F \in \text{FOR}$:

- $[(V \bullet *V) \equiv +V]' \in \text{GEV}$
- $[(\sim F \bullet *F) \equiv \neg F]' \in \text{GEV}$

Prueba:

Parte a. Para $Z \in \text{FOR}$, es decir, $Z' \in \text{gamma-LD}$:

$$\begin{aligned} \{V \bullet *V\} &\stackrel{\text{EQ}}{\equiv} (V \bullet (+V \cup \neg V))' \\ &\stackrel{\text{Traducción}}{\iff} V' (((V')) ((V')) \stackrel{\text{CC}}{\iff} V' (((V')) ((V')) \\ &\stackrel{\text{DCC}}{\iff} V' (((V')) V') \stackrel{\text{D}}{\iff} V' (((V')) \stackrel{\text{DCC}}{\iff} V' [(V')] \\ &\stackrel{\text{B}}{\iff} [(V')] \stackrel{\text{Traducción}}{\iff} \{+V\}' \end{aligned}$$

Aplicando TDG (proposición 9), resulta que $\lambda \gg \{(V \bullet *V)' \{+V\}'\}$, es decir, $\lambda \gg \{(V \bullet *V) \supset (+V)\}'$.

$$\begin{aligned} \{+V\}' &\stackrel{\text{Traducción}}{\iff} [(V')] \stackrel{\text{I}}{\iff} [(V')] [(V')] \stackrel{\text{CC}}{\iff} ((V')) \\ &\stackrel{\text{I}}{\iff} ((V')) ((V')) [(V')] \\ &\stackrel{\text{DCC}}{\iff} V' ((V')) (((V')) \stackrel{\text{CC}}{\iff} V' [(V')] (((V')) \stackrel{\text{I}}{\iff} V' \\ &\stackrel{\text{I}}{\iff} ((V')) ((V')) \\ &\stackrel{\text{B}}{\iff} V' (((V')) ((V')) \stackrel{\text{Traducción}}{\iff} \{V \bullet (+V \cup \neg V)\}' \end{aligned}$$

Aplicando TDG, resulta

$\lambda \gg \{ \{ +V \}' \{ (V \bullet (+V \cup \neg V))' \} \},$

es decir, $\lambda \gg \{ +V \supset (V \bullet *V) \}'.$

De los dos resultados obtenidos, se sigue que $\lambda \gg \{ +V \equiv (V \bullet *V) \}'$, es decir, $\{ +V \equiv (V \bullet *V) \}' \in \text{GEV}$; utilizando la proposición 17, se concluye que $+V \equiv (V \bullet *V) \in \text{TEO}$. La parte b se prueba de manera similar.

Ahora bien, muchas *paradojas lógicas* involucran los conceptos de verdad o falsedad, por ejemplo, la siguiente variante de la paradoja del mentiroso [5], [6]. Considérese la situación en la cual se tiene una oración como la siguiente:

Esta oración es falsa

Cuando se identifican en la lógica clásica, *ser* el caso con *verdadero* (Z) y *no ser* el caso con *falso* ($\neg Z$), entonces se tiene la paradoja: si la oración es el caso (Z), entonces resulta que también es falsa ($\neg Z$); y si la oración es falsa ($\neg Z$), entonces resulta que es el caso (Z). Es decir, $(Z \supset \neg Z) \bullet (\neg Z \supset Z)$. Por lo que resulta $Z \bullet \neg Z$. Como la lógica clásica no soporta las contradicciones, resulta inútil en este caso.

Cuando se identifican en la lógica intuicionista, *ser* el caso como *verdadero* (Z); y *no ser* el caso con *falso* ($\neg Z$), entonces se tiene la paradoja: si la oración es el caso (Z), entonces resulta que también es falsa ($\neg Z$); y si la oración es falsa ($\neg Z$), entonces resulta que es el caso (Z). Es decir, $(Z \supset \neg Z) \wedge (\neg Z \supset Z)$. así, resulta que $Z \wedge \neg Z$. Como la lógica intuicionista tampoco soporta las contradicciones, resulta inútil en este caso.

Cuando se identifican en la lógica intuicionista, *ser* el caso (Z), la doble negación como *verdadero* ($\neg\neg Z$); y *no ser* el caso con *falso* ($\neg Z$), entonces se tiene la paradoja: si la oración es verdadera ($\neg\neg Z$), entonces resulta que también es falsa ($\neg Z$); y si la oración es falsa ($\neg Z$), resulta que es verdadera ($\neg\neg Z$). Es decir, $(\neg\neg Z \supset \neg Z) \wedge (\neg Z \supset \neg\neg Z)$. De ese modo, resulta que $\neg Z \wedge \neg\neg Z$. Como la lógica intuicionista tampoco soporta las contradicciones, resulta inútil en este caso.

Conclusión 4. (Solución a una versión de la paradoja del mentiroso).

Con el fin de representar simbólicamente en la lógica doble (LD), la oración que dice “*Esta oración es falsa*”, se utiliza la siguiente interpretación:

W significa “*lo que dice la oración es el caso*”.

$\neg W$ significa “*lo que dice la oración no es el caso*”.

$\neg W$ significa “*la oración W es falsa*”.

$+W$ significa “*la oración W es verdadera*”.

La oración que dice “*Esta oración es falsa*” queda, entonces, representada por la fórmula $W \equiv \neg W$.

Como consecuencias en LD, se tienen los siguientes resultados, donde $W \in \text{FAA}$:

1. $W \equiv \neg W$ no genera contradicciones.
2. A partir de $W \equiv \neg W$ se infieren como conclusiones válidas: $\neg W$, $\neg\neg W$, $\sim W$ y $\sim^* W$.

Lo anterior significa que W no es el caso, no es falsa y no es verdadera, lo cual significa que W no está bien fundada; es decir, W no dice nada; W no tiene valor de verdad.

Prueba:

Parte 1. Sea $W \in \text{FAA}$. Supóngase que en LD, se tiene que $(W \equiv \neg W) \supset (Z \bullet \neg Z)$ para alguna $Z \in \text{FOR}$, es decir, $(W'([W']))([W'](W')) \gg ()$, lo cual, por TDIG (proposición 10a), implica $((W'([W']))([W'](W')))$.

Si, además, se tuviese $(W')([W'])$, por DC en el resultado previo, se infiere que $((W'([W']))([W']))$; de nuevo por DC, se sigue $((W'([W'])))$; aplicando DCC, resulta $W'([W'])$; por regla B, se deduce W' ; además, como se tiene (W') , por DC se obtiene $()$. Por TDIG (proposición 10a), se afirma que $((W')([W']))$, es decir, $(W') \gg [W']$.

Por la regla CC, se sabe que $[W'] \gg (W')$, y como ya se probó $(W') \gg [W']$, se concluye que los cortes clásico e intuicionista pueden intercambiarse en cualquier región, par o impar. Por otro lado, la regla DCC dice que $((W')) \gg W'$; aplicando TDG (proposición 9a), se llega a que $((W'))(W') \in \text{GEV}$; intercambiando cortes, puede asegurarse que $[[[W']](W')] \in \text{GEV}$; y como

$W \in \text{FAA}$, se deduce $[[[W']] (W')] \in \text{GIV}$; de esta manera, se concluye que $\neg \neg W \rightarrow W \in \text{TEOI}$, lo cual no es el caso. Por tanto, en LD, no se infiere $(W \equiv \neg W) \supset (Z \bullet \sim Z)$ para alguna $Z \in \text{FOR}$. Dicho de otra manera, $W \equiv \neg W$ no genera contradicción, lo cual significa que, en LD, no existe esta versión de la paradoja del mentiroso.

Parte 2.

$$\begin{aligned}
 & \{W \equiv \neg W\} \stackrel{\text{EQ}}{\Leftrightarrow} \{(W \supset \neg W) \bullet (\neg W \supset \neg W)\}' \\
 & \stackrel{\text{Traducción}}{\Leftrightarrow} (W' ([W'])) ((W') [W']) \\
 & \stackrel{\text{CC}}{\Rightarrow} (W' ([W'])) ([W'] [W']) \stackrel{\text{D}}{\Rightarrow} (W' ([W'])) ([W']) \\
 & \stackrel{\text{D}}{\Rightarrow} (W') ([W']) \Rightarrow (W') ([W']) (W') \\
 & \stackrel{\text{DCC}}{\Rightarrow} (W') ([W']) (((W')) \stackrel{\text{CC}}{\Rightarrow} (W') ([W']) ([W'])) \\
 & \stackrel{\text{Traducción}}{\Leftrightarrow} \{\sim W \bullet \sim \neg W \bullet \sim + W\}' \\
 & \stackrel{\text{NU}}{\Leftrightarrow} \{\sim W \bullet \sim (\neg W \cup + W)\}' \stackrel{\text{Def*}}{\Leftrightarrow} \{\sim W \bullet \sim^* W\}'.
 \end{aligned}$$

Conclusión 5 (ubicación de LD en la jerarquía de LBVA). En la jerarquía de lógicas basadas en la lógica básica paraconsistente y paracompleta (LB) [14], se tiene que la lógica doble (LD) es independiente de la lógica básica para la verdad y la falsedad LBVF [15]; además, LD se encuentra acotada por la lógica de las tautologías (LT) [16] y la lógica básica para la verdad aristotélica –LBVA (figura 1) [13].

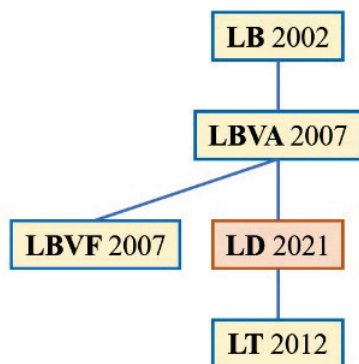


Figura 1. La relación extensión estricta.

Fuente: elaboración propia.

Preguntas abiertas (*existencia de nuevos sistemas de gráficos existenciales*):

1. ¿Existe gamma-LB?
2. ¿Existe gamma-LBVA?

3. ¿Existe gamma-LBVF?

4. ¿Existe gamma-LT?

Referencias

- [1] D. Roberts, “The existential graphs”, *Computters Math. Applic*, vol. 23, n.º 6-9, pp. 639-663, 1992.
- [2] Y. Poveda, “Los gráficos existenciales de Peirce en los sistemas alfa-₀ y alfa-₀₀”, *Boletín de Matemáticas*, vol. 2, n.º 1, pp. 5-17, 2000.
- [3] A. Oostra, “Los gráficos alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista”, *Cuadernos de Sistemática Peirceana*, n.º 2, pp. 25-60, 2010.
- [4] Aristóteles. *Metafísica Libro 4*. Madrid: Gredos, 1998.
- [5] I. Bochenski. *Historia de la lógica formal*. Madrid: Gredos, 1976.
- [6] R. Smullyan. *Como se llama este libro*. Madrid: Cátedra, 1997.
- [7] X. Caicedo. *Elementos de lógica y calculabilidad*. Bogotá: Universidad de los Andes, 1990.
- [8] A. Hamilton. *Lógica para matemáticos*. Madrid: Paraninfo, 1981.
- [9] C. S. Peirce. *Reasoning and the Logic of Things*. Cambridge: Harvard University Press, 1992.
- [10] A. Heyting. *Intuitionism. An Introduction (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. Amsterdam: North-holland Publishing Company, 1956.
- [11] D. Van Dalen. *Logic and Structure*. London: Springer-Verlag, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4558-5>
- [12] Platón, “Crátilo”, en *Diálogos*, vol. II, traducción y notas por J. L Calvo, Madrid: Gredos, 1983, pp. 339ss.
- [13] M. Sierra-Aristizábal, “Sistema paraconsistente y paracompleto LBPCPo”, *Revista Universidad Eafit*, vol. 43, n.º 148, pp. 91-112, 2007.
- [14] M. Sierra-Aristizábal. *Lógica básica para la verdad Aristotélica*. Medellín: Fondo Editorial Universidad Eafit, 2010.
- [15] M. Sierra-Aristizábal. “Lógica básica para la verdad y la falsedad”, *Revista Ingeniería y Ciencia*, vol. 3, n.º 6, pp. 135-171, 2007.
- [16] M. Sierra-Aristizábal, “Lógica de las tautologías”, *Revista Ingeniería y Ciencia*, vol. 8, n.º 15, pp. 97-119, 2012. DOI: <https://doi.org/10.17230/ingciencia.8.15.5>